Calculus for Engineering III SC402202

Lecture 19 Curvature and Radius of Curvature

Chapter 3 Vector-Valued Functions

[1]

บทนิยาม 1. ให้ C เป็นเส้นโค้งปรับเรียบในปริภูมิ 2 มิติ/ 3 มิติ ที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ที่มีความยาวส่วนโค้ง s เป็นตัวแปรเสริม **ความโค้ง** (curvature) ของ C เขียนแทนด้วย $\kappa = \kappa(s)$ และกำหนดโดย

$$\kappa(s) = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\| = \|\mathbf{r}''(s)\|$$

สังเกตว่าความโค้งของเส้นโค้ง คือ ขนาดของอัตราการเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย $\mathbf{T}$ เทียบกับความยาวส่วนโค้ง s นั่นเอง ซึ่งโดยทั่วไปแล้วความโค้งของเส้นโค้ง ณ แต่ละจุดบนเส้นโค้งจะไม่เท่ากัน ยกเว้นเส้นตรง และวงกลมในปริภูมิ 2 มิติดังตัวอย่างที่จะกล่าวถึงต่อไป

ตัวอย่าง 1. พิจารณาสมการเส้นตรงในรูป $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ ที่ผ่านจุดปลายของเวกเตอร์ตำแหน่ง $\mathbf{r}_0$ และขนานกับเวกเตอร์ $\mathbf{v}$

1. จงเขียนสมการเส้นตรง $\mathbf{r}(s)$ ที่มีความยาวส่วนโค้ง s เป็นตัวแปรเสริม
2. จงหาความโค้งของเส้นตรง ณ จุดใด ๆ

วิธีทำ เนื่องจากสมการเส้นตรงคือ $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(\overset{t_0}{0}) + t\mathbf{v}$

$\Rightarrow \mathbf{r}'(t) = \mathbf{v} \Rightarrow \|\mathbf{r}'(t)\| = \|\mathbf{v}\| \Rightarrow \|\mathbf{r}'(u)\| = \|\mathbf{v}\|$

$\Rightarrow$ ฟังก์ชันความยาวส่วนโค้ง s คือ

$$s = \int_{u=0}^{u=t} \|\mathbf{r}'(u)\|\,du = \int_{u=0}^{u=t} \|\mathbf{v}\|\,du = \|\mathbf{v}\|u \Big]_{u=0}^{u=t} = \|\mathbf{v}\|t$$

$$\Rightarrow t = \frac{s}{\|\mathbf{v}\|}$$

[1] ABD12 : Section 12.5 : 1-2, 5-12, 13-16, 17-18, 19-22, 23, 25-28, 29-32, 45-48

ดังนั้น $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_0 + \frac{s}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$, $\Rightarrow \mathbf{r}'(s) = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \Rightarrow \mathbf{r}''(s) = \mathbf{0}$

นั่นคือ ความโค้งของเส้นตรง ณ จุดใด ๆ คือ $\|\mathbf{0}\| = 0$ □

สังเกตว่าในการหาความโค้งของเส้นโค้งนั้น เราจำเป็นต้องเปลี่ยนฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ของตัวแปรเสริม t เป็นตัวแปรเสริมของความยาวส่วนโค้ง s ก่อน จึงจะทำการคำนวณได้ ในทฤษฎีบทต่อไปนี้ เราสามารถคำนวณความโค้งโดยใช้อนุพันธ์ของฟังก์ชันของตัวแปร t ดังนี้

ทฤษฎีบท 1. *ให้ C เป็นเส้นโค้งในปริภูมิ 2 มิติ/ 3 มิติ ที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t)$ ที่เป็นฟังก์ชันปรับเรียบ จะได้ว่า สำหรับทุก t ที่ $\mathbf{T}'(t)$ และ $\mathbf{r}'(t)$ หาค่าได้*

1. $\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$
2. $\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$

ตัวอย่าง 2. จงหาความโค้งของวงกลมที่มีรัศมี a หน่วยและมีจุดศูนย์กลางที่ (x_0, y_0)

วิธีทำ เนื่องจากเส้นโค้ง C เป็นวงกลมที่มีรัศมี a หน่วย และมีจุดศูนย์กลางที่ (x_0, y_0) ดังนั้น

$$\mathbf{r}(t) = (x_0 + a\cos t)\,i + (y_0 + a\sin t)\,j$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}'(t) = -a\sin t\, i + a\cos t\, j$$ +ok

$$\Rightarrow \mathbf{r}''(t) = -a\cos t\, i - a\sin t\, j$$ +ok

$$\Rightarrow \mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t) = \left|\begin{array}{ccc|cc} i & j & k & i & j \\ -a\sin t & a\cos t & 0 & -a\sin t & a\cos t \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 & -a\cos t & -a\sin t \end{array}\right.$$

$$= 0 + 0 + a^2\sin^2 t\, k + a^2\cos^2 t\, k - 0 - 0$$

$$= a^2(\sin^2 t + \cos^2 t)\, k = a^2 k$$

$$\Rightarrow \|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (a^2)^2} = a^2$$

และ $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2} = \sqrt{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} = \sqrt{a^2} = |a| = a$

ดังนั้น $\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3} = \frac{a^2}{a^3} = \frac{1}{a}$ $\square$

ตัวอย่าง 3. กำหนดให้ $a > 0$ จงหาความโค้งของเกลียวเชิงวงกลม $\mathbf{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\sin t\mathbf{j} + ct\mathbf{k}$

วิธีทำ จาก $\mathbf{r}(t) = a\cos t\, i + a\sin t\, j + ct\, k$

$\Rightarrow \mathbf{r}'(t) = -a\sin t\, i + a\cos t\, j + c\, k \Rightarrow \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{a^2+c^2}$

$\Rightarrow \mathbf{r}''(t) = -a\cos t\, i - a\sin t\, j + 0k$

$$\Rightarrow \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a\sin t & a\cos t & c \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} i & j \\ -a\sin t & a\cos t \\ -a\cos t & -a\sin t \end{matrix}$$

$$= 0 - ac\cos t\, j + a^2\sin^2 t\, k + a^2\cos^2 t\, k + ac\sin t\, i + 0$$

$$= ac\sin t\, i - ac\cos t\, j + a^2(\sin^2 t + \cos^2 t)\, k$$

$$= ac\sin t\, i - ac\cos t\, j + a^2 k$$

$$\Rightarrow \|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\| = \sqrt{(ac)^2\sin^2 t + (ac)^2\cos^2 t + (a^2)^2}$$

$$= \sqrt{a^2c^2 + a^2a^2} = a\sqrt{a^2+c^2}$$

ดังนั้น $\kappa(t) = \dfrac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3} = \dfrac{a\sqrt{a^2+c^2}}{\left(\sqrt{a^2+c^2}\right)^3} = \dfrac{a}{\left(\sqrt{a^2+c^2}\right)^2}$

$$= \frac{a}{a^2+c^2}$$

$\square$

ตัวอย่าง 4. จงหาความโค้งของวงรี $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 3\sin t\mathbf{j}$ ณ จุดปลายแกนเอกและปลายแกนโท

$$\kappa(t) = \frac{6}{\left(\sqrt{4\sin^2 t + 9\cos^2 t}\right)^3}$$

$\Rightarrow$ ณ ปลายแกนเอก

$$\kappa\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{4} \quad \text{และ} \quad \kappa\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

และ ณ จุดปลายแกนโท

$$\kappa(0) = \frac{2}{9} \quad \text{และ} \quad \kappa(\pi) = \frac{2}{9}$$

$\square$

จากตัวอย่างข้างต้นนี้ จะได้ว่า ความโค้ง ณ จุดปลายแกนเอกของวงรี คือ $\frac{3}{4}$ และความโค้ง ณ จุดปลายแกนโท $\frac{2}{9}$ ในอีกด้านหนึ่ง เราทราบว่าความโค้งของวงกลมรัศมี a หน่วยเป็นค่าคงตัว $\frac{1}{a}$ นั่นคือ ความโค้งของวงรี ณ จุดปลายแกนเอกของวงรีเท่ากับความโค้งของวงกลมรัศมี $\frac{4}{3}$ หน่วย และความโค้งของวงรี ณ จุดปลายแกนโทของวงรีเท่ากับความโค้งของวงกลมรัศมี $\frac{9}{2}$ หน่วยดัง Figure 1 และ 2

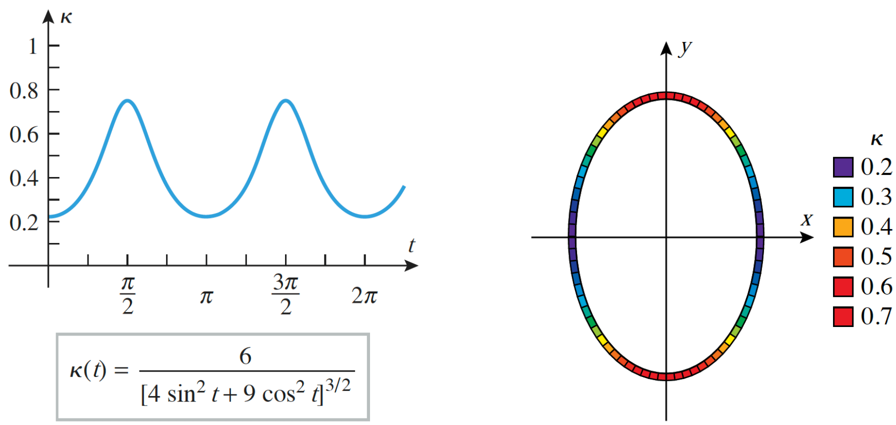

Figure 1: ความโค้ง ณ จุดต่าง ๆ ของวงรี ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 877)

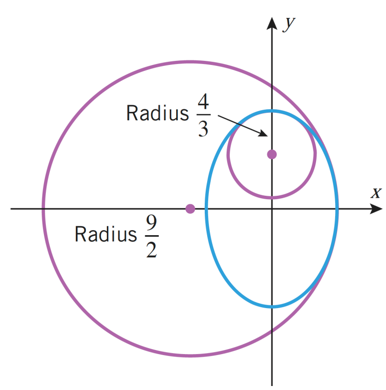

Figure 2: ความโค้งของวงรี ณ จุดปลายแกนเอกและปลายแกนโท ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 877)

บทนิยาม 2. ให้ C เป็นเส้นโค้งในปริภูมิ 2 มิติที่มีความโค้ง $\kappa \neq 0$ ณ จุด P เราจะเรียก

- วงกลมรัศมี $\rho = \frac{1}{\kappa}$ หน่วย ที่สัมผัสกับ C ที่จุด P และมีจุดศูนย์กลางอยู่ภายในด้านเว้า (concave) ของส่วนโค้ง ว่า **วงกลมสัมผัสประชิด** (osculating circle) หรือ **วงกลมของความโค้ง** (circle of curvature) ณ จุด P
- รัศมี ρ หน่วยของวงกลมสัมผัสประชิด ว่า **รัศมีของความโค้ง** (radius of curvature) ณ จุด P

- จุดศูนย์กลางของวงกลมสัมผัสประชิด ว่า **จุดศูนย์กลางของความโค้ง** (center of curvature) ณ จุด P

ซึ่งอธิบายได้ดัง Figure 3

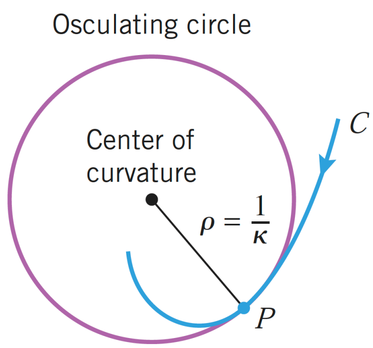

Figure 3: วงกลมสัมผัสประชิดและรัศมีของความโค้ง ณ จุด P ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 877)

ตัวอย่าง 5. จงหารัศมีของความโค้งของเส้นโค้งที่กำหนดโดย $\mathbf{r}(t) = e^{-t}\cos t\,\mathbf{i} + e^{-t}\sin t\,\mathbf{j}$ เมื่อ t มีค่าใกล้อนันต์

$$\rho(t) = \frac{1}{\kappa(t)} = \frac{\sqrt{2}}{e^{t}}$$

ดังนั้น ถ้า $t \to +\infty$ แล้ว $\rho(t) \to 0$

$\square$