

## Lecture 20 Line Integrals

## Chapter 4 Vector Calculus

1

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาปริพันธ์ตามเส้นของฟังก์ชันในปริภูมิ 2 มิติดังนี้

**บทนิยาม 1.** ให้  $C$  เป็นเส้นโค้งปรับเรียบในปริภูมิ 2 มิติที่กำหนดโดยสมการอิงตัวแปรเสริม

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{สำหรับทุก} \quad t \in [a, b]$$

และให้  $f(x, y)$  และ  $g(x, y)$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน  $C$

ปริพันธ์ตามเส้น (line integral) ของ  $f$  บน  $C$  เทียบ  $x$  กำหนดโดย

$$\int_C f(x, y) dx = \int_a^b f(x(t), y(t)) x'(t) dt$$

และปริพันธ์ตามเส้น (line integral) ของ  $g$  บน  $C$  เทียบ  $y$  กำหนดโดย

$$\int_C g(x, y) dy = \int_a^b g(x(t), y(t)) y'(t) dt$$

โดยทั่วไปแล้ว ถ้าต้องการคำนวณปริพันธ์ตามเส้นเทียบ  $x$  และ  $y$  พร้อมกัน เราจะเขียนแทนด้วย

$$\int_C f(x, y) dx + g(x, y) dy := \int_C f(x, y) dx + \int_C g(x, y) dy$$

**ตัวอย่าง 1.** จงหาค่าของ  $\int_C 2xy dy$  โดยที่  $C$  เป็นส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด  $(0, 0)$  และ  $(1, 2)$  โดยมีทิศทางการเพิ่มขึ้นของตัวแปรเสริมดังนี้

1. จาก  $(0, 0)$  ไปยัง  $(1, 2)$
2. จาก  $(1, 2)$  ไปยัง  $(0, 0)$

<sup>1</sup>ABD12 : Section 15.2 : 1(b), 2(b), 7-10, 11(b,c), 12(b,c,d), 13, 14, 17, 23-30, 33-34, 35-36, 37-40, 41, 42, 43, 44, 45-48, 49-50, 54, 56

**ทฤษฎีบท 1.** ให้  $C$  เป็นเส้นโค้งปรับเรียบ และ  $-C$  เป็นเส้นโค้งที่บรรจุทุกจุดของ  $C$  แต่มีทิศทางตรงข้ามกับ  $C$  ถ้า  $f(x,y)$  และ  $g(x,y)$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน  $C$  แล้ว

$$\int_{-C} f(x,y)dx + g(x,y)dy = - \int_C f(x,y)dx + g(x,y)dy$$

**ตัวอย่าง 2.** จงหาค่าของ  $\int_C (3x^2 + y^2)dx + 2xydy$  โดยที่  $C$  เป็นส่วนของวงกลมที่กำหนดโดย  $x = \cos t$  และ  $y = \sin t$  สำหรับทุก  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$  โดยมีทิศทางการเพิ่มขึ้นของตัวแปรเสริมในทิศทวนเข็มนาฬิกา

ตัวอย่าง 3. จงหาค่าของ  $\int_C (x^2 + y)dx + (x^2 + y)dy$  โดยที่  $C$  เป็นส่วนของพาราโบลา จากจุด  $(0,0)$  ไปยัง  $(2,4)$

สังเกตว่าในการหาปริพันธ์ตามเส้นนั้น เส้นโค้ง  $C$  ต้องเป็นเส้นโค้งปรับเรียบ อย่างไรก็ตาม ถ้า  $C$  เป็นเส้นโค้งปรับเรียบเป็นช่วงที่สามารถแบ่งออกเป็นช่วงย่อย  $C_1, C_2, \dots, C_n$  ที่เป็นเส้นโค้งปรับเรียบและจุดเริ่มต้นของ  $C_{i+1}$  เป็นจุดปลายของ  $C_i$  สำหรับทุก  $i = 1, \dots, n-1$  เรานิยามปริพันธ์ตามเส้นบนเส้นโค้งปรับเรียบเป็นช่วงนี้ได้เป็น

$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \dots + \int_{C_n}$$

**ตัวอย่าง 4.** จงหาค่าของ  $\int_C x^2 y dx + x dy$  โดยที่  $C$  เป็นเส้นรอบรูปสามเหลี่ยมมุมฉากจากจุด  $(0,0)$  ไปยัง  $(1,0)$  ต่อไปยัง  $(1,2)$  และกลับไปยังจุด  $(0,0)$

ตัวอย่าง 5. จงหาค่าของ  $\int_C (x+y)^2 dx + (x-y)^2 dy$  โดยที่  $C$  เป็นเส้นโค้งที่กำหนดโดยฟังก์ชัน  $y = |2x|$  จากจุด  $(-1, 2)$  ไปยัง  $(1, 2)$

ในลำดับต่อไป เราจะศึกษาสมบัติของปริพันธ์ตามเส้นของฟังก์ชันในปริภูมิ 2 มิติเพิ่มเติม ปริพันธ์ตามเส้นในปริภูมิ 3 มิติ และการประยุกต์ใช้ปริพันธ์ตามเส้นดังนี้

**ทฤษฎีบท 2.** ให้  $C$  เป็นเส้นโค้งปรับเรียบที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์  $\mathbf{r}(t)$  สำหรับทุก  $t \in [a, b]$  ถ้าเส้นโค้ง  $C$  สามารถกำหนดได้โดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์  $\tilde{\mathbf{r}}(t)$  สำหรับทุก  $t \in [c, d]$  ด้วยและทิศทางการเพิ่มขึ้นของตัวแปรเสริมคงเดิม แล้วปริพันธ์ตามเส้นบน  $C$  ที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์  $\mathbf{r}(t)$  และ  $\tilde{\mathbf{r}}(t)$  เท่ากัน

**ตัวอย่าง 6.** จงหาค่าของ  $\int_C xy dx + (x^2 + y^2) dy$  โดยที่  $C$  เป็นเส้นโค้งที่กำหนดดังนี้

1.  $x = \cos(2t), y = \sin(2t)$  สำหรับทุก  $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$
2.  $x = \cos(t^2), y = \sin(t^2)$  สำหรับทุก  $t \in [0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}]$
3.  $x = \cos(-t), y = \sin(t)$  สำหรับทุก  $t \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$
4.  $x = t, y = \sqrt{1-t^2}$  สำหรับทุก  $t \in [0, 1]$

**บทนิยาม 2.** ให้  $D$  เป็นเซตของจุดในปริภูมิ 2 มิติ **สนามเวกเตอร์** (vector field) บนปริภูมิ คือ ฟังก์ชัน  $\mathbf{F}$  ที่ส่งแต่ละจุดใน  $D$  เป็นเวกเตอร์  $\mathbf{F}(x,y)$  เพียงค่าเดียวเท่านั้น

เนื่องจาก  $\mathbf{F}(x,y)$  เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ของตัวแปร  $x$  และ  $y$  นั่นคือ จะมีฟังก์ชันส่วนประกอบ  $f(x,y)$  และ  $g(x,y)$  ที่ทำให้

$$\mathbf{F}(x,y) = f(x,y)\mathbf{i} + g(x,y)\mathbf{j}$$

พิจารณาเวกเตอร์ตำแหน่ง  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  จะได้  $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$  นั่นคือ

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C (f(x,y)\mathbf{i} + g(x,y)\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) \\ &= \int_C f(x,y)dx + g(x,y)dy \end{aligned}$$

**บทนิยาม 3.** ให้  $\mathbf{F}$  เป็นสนามเวกเตอร์ที่มีความต่อเนื่อง และ  $C$  เป็นเส้นโค้งปรับเรียบที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์  $\mathbf{r}(t)$  **ปริพันธ์ตามเส้นของ  $\mathbf{F}$  บน  $C$**  (line integral of  $\mathbf{F}$  along  $C$ ) กำหนดโดย

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

สังเกตว่า ถ้า  $C$  เป็นเส้นโค้งที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$  สำหรับทุก  $t \in [a, b]$  จะได้  $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = f(x(t), y(t))\mathbf{i} + g(x(t), y(t))\mathbf{j}$

นั่นคือ

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

**ตัวอย่าง 7.** จงหาค่าของ  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  โดยที่  $\mathbf{F}(x,y) = \cos x\mathbf{i} + \sin x\mathbf{j}$  และ  $C$  เป็นเส้นโค้งที่กำหนดดังนี้

1.  $C : \mathbf{r}(t) = -\frac{\pi}{2}\mathbf{i} + t\mathbf{j} \quad (1 \leq t \leq 2)$

2.  $C : \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} \quad (-1 \leq t \leq 2)$

ปริพันธ์ตามเส้นมีการประยุกต์ใช้ที่สำคัญในเรื่อง งาน ที่เกิดจากการใช้แรง  $\mathbf{F}$  ทำให้อนุภาคเคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้ง

**บทนิยาม 4.** ให้  $\mathbf{F}$  เป็นสนามเวกเตอร์แรงที่มีความต่อเนื่องซึ่งใช้ในการเคลื่อนที่อนุภาคตามเส้นโค้งปรับเรียบ  $C$  ที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์  $\mathbf{r}(t)$  และมีทิศทางการเพิ่มขึ้นของตัวแปรเสริมเป็นทิศทางการเคลื่อนที่ของอนุภาค **งาน** (work) ที่เกิดจากสนามเวกเตอร์แรงที่กระทำต่ออนุภาค กำหนดโดย

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

ทั้งนี้ ที่มาของบทนิยามข้างต้นนี้ นักศึกษาสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จาก Anton et al. (2012) หน้า 1105 - 1106

**ตัวอย่าง 8.** จงหางานที่เกิดจากเคลื่อนที่ของอนุภาคซึ่งเคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้ง  $y = x^2$  จากจุด  $(-1, 1)$  ไปยัง  $(2, 4)$  ในสนามแรง  $\mathbf{F}(x, y) = x^3y\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j}$



ปริพันธ์ตามเส้นสามารถอธิบายเรื่องงานในปริภูมิ 3 มิติได้เช่นกัน โดยจะเกี่ยวข้องกับปริพันธ์ตามเส้นในปริภูมิ 3 มิติดังนี้

**บทนิยาม 5.** ให้  $C$  เป็นเส้นโค้งปรับเรียบในปริภูมิ 3 มิติที่กำหนดโดยสมการอิงตัวแปรเสริม

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{และ} \quad z = z(t) \quad \text{สำหรับทุก} \quad t \in [a, b]$$

และให้  $f(x, y, z)$ ,  $g(x, y, z)$  และ  $h(x, y, z)$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน  $C$

ปริพันธ์ตามเส้น (line integral) ของ  $f$  บน  $C$  เทียบ  $x$  กำหนดโดย

$$\int_C f(x, y, z) dx = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt$$

ปริพันธ์ตามเส้น (line integral) ของ  $g$  บน  $C$  เทียบ  $y$  กำหนดโดย

$$\int_C g(x, y, z) dy = \int_a^b g(x(t), y(t), z(t)) y'(t) dt$$

และปริพันธ์ตามเส้น (line integral) ของ  $h$  บน  $C$  เทียบ  $z$  กำหนดโดย

$$\int_C h(x, y, z) dz = \int_a^b h(x(t), y(t), z(t)) z'(t) dt$$

โดยทั่วไปแล้ว ถ้าต้องการคำนวณปริพันธ์ตามเส้นเทียบ  $x, y$  และ  $z$  พร้อมกัน เราจะเขียนแทนด้วย

$$\int_C f(x, y, z) dx + g(x, y, z) dy + h(x, y, z) dz := \int_C f(x, y, z) dx + \int_C g(x, y, z) dy + \int_C h(x, y, z) dz$$

**ตัวอย่าง 9.** จงหางานที่เกิดจากเคลื่อนที่ของอนุภาคซึ่งเคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้ง  $t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$  จากจุด  $(0, 0, 0)$  ไปยัง  $(1, 1, 1)$  ในสนามแรง

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y - x^2)\mathbf{i} + (z - y^2)\mathbf{j} + (x - z^2)\mathbf{k}$$