Calculus for Engineering III SC402202

Lecture 21 Independence of Path, Conservative Vector Fields

Chapter 4 Vector Calculus

[1] ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาทฤษฎีบทหลักมูลของปริพันธ์ตามเส้น เพื่อช่วยให้การคำนวณปริพันธ์ตามเส้นสะดวกขึ้นดังนี้

จากหัวข้อก่อนหน้านี้ ถ้า $\mathbf{F}$ เป็นสนามแรงในปริภูมิ 2มิติ/ 3 มิติ จะได้ว่า งานที่เกิดจากการเคลื่อนที่อนุภาคไปตามเส้นโค้ง C ที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t)$ ภายใต้สนามแรงนี้ คำนวณได้โดย

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

ซึ่งเราจะเรียกปริพันธ์ตามเส้นนี้ว่า **ปริพันธ์งาน** (work integral) นอกจากนี้ ปริพันธ์งานสามารถเขียนได้เป็น

$$\int_C f(x,y)dx+g(x,y)dy := \int_C f(x,y)dx+\int_C g(x,y)dy$$

หรือ

$$\int_C f(x,y,z)dx+g(x,y,z)dy+h(x,y,z)dz := \int_C f(x,y,z)dx+\int_C g(x,y,z)dy+\int_C h(x,y,z)dz$$

โดยที่ f, g และ h เป็นฟังก์ชันส่วนประกอบของ $\mathbf{F}$ ในแต่ละปริภูมิ

ทั้งนี้ เราจะเรียกเส้นโค้ง C ในปริพันธ์งานว่า **วิถีของปริพันธ์** (path of integration)

ตัวอย่าง 1. จงหาค่าของปริพันธ์งาน $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ โดยที่ $\mathbf{F}(x,y) = y\mathbf{i}+x\mathbf{j}$ เป็นสนามแรง และวิถีของปริพันธ์จากจุด $(0,0)$ ไปยัง $(1,1)$ กำหนดดังนี้

1. ส่วนของเส้นตรง $y = x$
2. พาราโบลา $y = x^2$
3. พหุนามกำลังสาม $y = x^3$

[1] **ABD12** : Section 15.3 : 1-6, 7, 8, 9-14, 15-18, 19-22, 23-24, 32, 33, 34, 35-36

บทนิยาม 1. ให้ D เป็นเซตของจุดในปริภูมิ 2 มิติ และ $\mathbf{F}$ เป็นสนามเวกเตอร์ในปริภูมิ 2มิติ เราจะกล่าวว่า $\mathbf{F}$ เป็น **สนามเวกเตอร์อนุรักษ์** (conservative vector field) บนบริเวณ D ถ้ามีฟังก์ชันค่าจริง ϕ นิยามบนบริเวณ D ที่ซึ่ง

$$\mathbf{F} = \nabla\phi$$

และเราจะเรียกฟังก์ชันค่าจริง ϕ นี้ว่า **ฟังก์ชันศักย์** (potential function)

สังเกตว่าในกรณีที่ $\mathbf{F}(x,y)$ เป็นสนามเวกเตอร์ในปริภูมิ 2 มิติ จะได้ว่า $\mathbf{F}$ เป็นสนามเวกเตอร์อนุรักษ์ ก็ต่อเมื่อ เราสามารถหาฟังก์ชันศักย์ ϕ ที่ซึ่ง

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j}$$

ทฤษฎีที่มีความสำคัญมากในหัวข้อปริพันธ์ตามเส้นคือ ทฤษฎีบทหลักมูลของปริพันธ์ตามเส้น (The Fundamental Theorem of Line Integral) ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

ทฤษฎีบท 1 (ทฤษฎีบทหลักมูลของปริพันธ์ตามเส้น). *ให้ D เป็นบริเวณที่บรรจุจุด (x_0,y_0) และ (x_1,y_1) และ*

$$\mathbf{F}(x,y) = f(x,y)\mathbf{i} + g(x,y)\mathbf{j}$$

เป็นสนามเวกเตอร์อนุรักษ์บน D และสมมติให้ฟังก์ชันส่วนประกอบ $f(x,y)$ และ $g(x,y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน D
ถ้า $\mathbf{F} = \nabla\phi$ และ C เป็นเส้นโค้งปรับเรียบเป็นช่วงบน D ที่มีจุดเริ่มต้น (x_0,y_0) และจุดปลาย (x_1,y_1) แล้ว

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \phi(x_1,y_1) - \phi(x_0,y_0)$$

จากทฤษฎีบทข้างต้นแสดงให้เห็นว่าค่าของปริพันธ์ตามเส้นของสนามเวกเตอร์อนุรักษ์ตามเส้นโค้งปรับเรียบเป็นช่วงเป็น**อิสระตามวิถี** (independent of path) กล่าวคือ ค่าของปริพันธ์จะขึ้นอยู่กับจุดเริ่มต้นและจุดปลายของเส้นโค้ง โดยที่ไม่ขึ้นอยู่กับลักษณะของเส้นโค้งเลย เพราะฉะนั้น ปริพันธ์ตามเส้นของสนามเวกเตอร์อนุรักษ์ตามเส้นโค้งปรับเรียบเป็นช่วงสามารถเขียนได้เป็น

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} \nabla\phi\cdot d\mathbf{r} = \phi(x_1,y_1) - \phi(x_0,y_0)$$

ตัวอย่าง 2. จงแสดงว่าสนามเวกเตอร์ $\mathbf{F}(x,y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ เป็นสนามเวกเตอร์อนุรักษ์บน $\mathbb{R}^2$ และจงใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของปริพันธ์ตามเส้นคำนวณค่าของ $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ โดยที่ C เป็นเส้นโค้งปรับเรียบเป็นช่วงใด ๆ ที่มีจุดเริ่มต้น $(0,0)$ และจุดปลาย $(1,1)$

ตัวอย่าง 3. จงแสดงว่าสนามเวกเตอร์ $\mathbf{F}(x,y) = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j}$ เป็นสนามเวกเตอร์อนุรักษ์บน $\mathbb{R}^2$ และจงใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของปริพันธ์ตามเส้นคำนวณค่าของ $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ โดยที่ C เป็นเส้นโค้งปรับเรียบเป็นช่วงใด ๆ ที่มีจุดเริ่มต้น $(0,0)$ และจุดปลาย $(2,4)$

ตัวอย่าง 4. ให้ $\mathbf{F}$ เป็นสนามเวกเตอร์อนุรักษ์บน $\mathbb{R}^2$ ที่มีความต่อเนื่อง ถ้า C เป็นเส้นโค้งปรับเรียบเป็นช่วงปิด แล้วจงแสดงว่า $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$

สังเกตว่าในการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของปริพันธ์ตามเส้นนั้น เราจำเป็นต้องตรวจสอบว่าสนามเวกเตอร์ $\mathbf{F}$ ที่พิจารณาเป็นสนามเวกเตอร์อนุรักษ์โดยการหาฟังก์ชันศักย์ ϕ ที่ทำให้ $\mathbf{F} = \nabla\phi$ ซึ่งอาจไม่สะดวกมากนัก ในส่วนต่อไปนี้ เราจะศึกษาทฤษฎีบทเกี่ยวกับการตรวจสอบสนามเวกเตอร์ที่พิจารณาว่าเป็นสนามเวกเตอร์อนุรักษ์หรือไม่ มีรายละเอียดดังนี้

บทนิยาม 2. เราจะกล่าวว่าเส้นโค้ง C ในปริภูมิ 2 มิติที่นิยามบนช่วง $[a,b]$ เป็น **เส้นโค้งอย่างง่าย** (simple curve) ถ้า C ไม่มีจุดตัดกับตัวเองบน $[a,b]$

เราจะกล่าวว่าเซต D ที่เป็นเซตของจุดในปริภูมิ 2 มิติเป็น **เซตเชื่อมโยงอย่างง่าย** (simply connected set) ถ้าไม่มีเส้นโค้งปิดอย่างง่ายใน D ที่ล้อมรอบบริเวณที่ไม่อยู่ใน D

ทฤษฎีบท 2 (การตรวจสอบสนามเวกเตอร์อนุรักษ์). *ให้บริเวณ D ในปริภูมิ 2 มิติเป็นเซตเชื่อมโยงอย่างง่าย และ*

$$\mathbf{F}(x,y) = f(x,y)\mathbf{i} + g(x,y)\mathbf{j}$$

เป็นสนามเวกเตอร์บน D และสมมติให้ฟังก์ชันส่วนประกอบ $f(x,y)$ และ $g(x,y)$ และอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งที่เกี่ยวข้องเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน D
จะได้ว่า สนามเวกเตอร์ $\mathbf{F}$ เป็นสนามเวกเตอร์อนุรักษ์ ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $(x,y) \in D$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

ตัวอย่าง 5. พิจารณาสนามเวกเตอร์ $\mathbf{F}(x,y) = 2xy^3\mathbf{i} + (1+3x^2y^2)\mathbf{j}$

- จงแสดงว่า $\mathbf{F}$ เป็นสนามเวกเตอร์อนุรักษ์บน $\mathbb{R}^2$
- จงหาฟังก์ชันศักย์ ϕ

จากทฤษฎีบทหลักมูลของปริพันธ์ตามเส้น และทฤษฎีบทการตรวจสอบสนามเวกเตอร์อนุรักษ์ เราสามารถสรุปวิธีการหาค่า $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ได้ดังนี้

1. ตรวจ สอบ ว่า สนาม เวก เตอร์ $\mathbf{F}(x,y)$ เป็น สนาม เวก เตอร์ อนุรักษ์ โดย ใช้ ทฤษฎีบทการตรวจสอบสนามเวกเตอร์อนุรักษ์

2. หาฟังก์ชันศักย์ $\phi(x,y)$: พิจารณาความสัมพันธ์

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{\partial \phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathbf{j} \tag{1}$$

2.1 หาปริพันธ์ย่อยของ $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ เทียบ x จะได้ฟังก์ชัน

$$\phi(x,y) = u(x,y) + k(y) \tag{2}$$

โดยที่ $k(y)$ เป็นค่าคงตัวจากการหาปริพันธ์ย่อยเทียบ x

2.2 หาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน $\phi(x,y)$ ใน (2) เทียบ y จะได้

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + k'(y)$$

จากนั้นทำกับเทียบพจน์กับ $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ ใน (1) จะได้ $k'(y)$

2.3 หาปริพันธ์ของ $k'(y)$ เทียบ y จะได้ $k(y)$ ซึ่งนำไปแทนใน (2) จะได้ $\phi(x,y)$

3. ประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของปริพันธ์ตามเส้น จะได้

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(x_1,y_1) - \phi(x_0,y_0)$$

ตัวอย่าง 6. จงหาค่าของปริพันธ์ตามเส้น

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} (3x^2 + 2x + y^2)dx + (2xy + y^3)dy$$

ตัวอย่าง 7. จงหางานที่เกิดจากเคลื่อนที่ของอนุภาคจากจุด $(-1,0)$ ไปยัง $(5,\pi/2)$ ตามเส้นโค้งปรับเรียบเป็นช่วงใด ๆ ในสนามแรง $\mathbf{F}(x,y) = 2x\sin y\mathbf{i} + (x^2\cos y - 3y^2)\mathbf{j}$