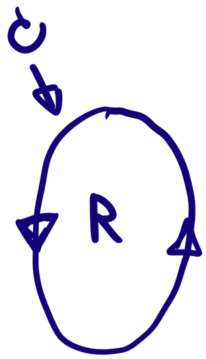
Lecture 22 Green's Theorem

Chapter 4 Vector Calculus



[1] ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาทฤษฎีบทที่ช่วยให้การคำนวณปริพันธ์ตามเส้นสะดวกขึ้นโดยใช้ความรู้เกี่ยวกับปริพันธ์สองชั้นดังนี้

R: simply connected
C: simple + closed
+ piecewise smooth
+ counterclockwise direction

> **ทฤษฎีบท 1** (ทฤษฎีบทของกรีน (Green's Theorem)). *ให้ R เป็นบริเวณที่เป็นเซตเชื่อมโยง (simply connected set) ที่มีขอบเขตเป็นเส้นโค้ง C ที่เป็นเส้นโค้งอย่างง่าย (simple) ปิด (closed) ปรับเรียบเป็นช่วง (piecewise smooth) และมีทิศทางทวนเข็มนาฬิกา (counterclockwise)*
> *ถ้าฟังก์ชัน $f(x,y)$ และ $g(x,y)$ และอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งที่เกี่ยวข้อง เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนบริเวณเปิดที่บรรจุ R แล้ว ปริพันธ์ตามเส้น*
>
> $$\int_C f(x,y)dx + g(x,y)dy = \iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dA$$

เนื่องจากเส้นโค้ง C ที่สอดคล้องกับทฤษฎีบทของกรีนต้องเป็นเส้นโค้งปิด เราอาจใช้สัญลักษณ์ $\oint$ แทน $\int$ เพื่อระบุสมบัติเฉพาะนี้ได้

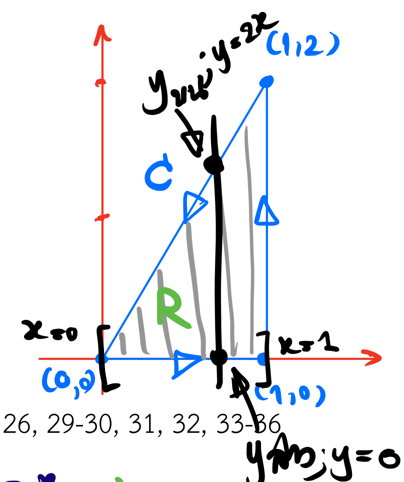
$\int \quad \oint \quad \oint$

ตัวอย่าง 1. จงประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทของกรีนเพื่อหาค่าของ

$$\oint_C x^2y\,dx + x\,dy$$

โดยที่ C เป็นวิถีรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีจุดยอดเป็น $(0,0)$, $(1,0)$ และ $(1,2)$ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

กิจที่ 1 ตรวจสอบ R : simply connected
ตรวจสอบ C : simple + closed
+ piecewise smooth
+ counter clockwise direction



[1] ABD12 : Section 15.4 : 1-2, 3-13, 14, 15-18, 20, 21, 23, 24, 26, 29-30, 31, 32, 33-36

ตรวจสอบ $f(x,y) = x^2y$ และ $g(x,y) = x$

และ $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2$ และ $\frac{\partial g}{\partial x} = 1$

cont. on R

By Green's Thm จะได้ว่า

$$\oint_C x^2y\,dx + x\,dy = \iint_R (1-x^2)\,dA = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=2x}(1-x^2)\,dy\,dx = \cdots = \frac{1}{2} \quad \square$$

ตัวอย่าง 2. จงประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทของกรีนเพื่อหาค่าของ

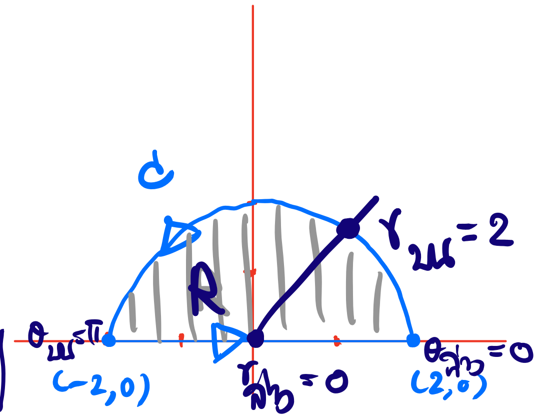
$$\oint_C (e^{x^2}-y)\,dx + (x+\sin\sqrt{y})\,dy$$

โดยที่ C เป็นวิถีในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาที่ประกอบด้วยเส้นรอบครึ่งวงกลมรัศมี 2 หน่วยเหนือแกน x และส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $(-2,0)$ กับ $(2,0)$

วิธีทำ

พิจารณา R: simply connected

พิจารณา C: simple + closed + p.s. + counterclockwise direction



$$R = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4,\ y \ge 0\}$$
$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y = \sqrt{4-x^2}\}$$

พิจารณา

$f(x,y) = e^{x^2} - y$: cont. on R

$g(x,y) = x + \sin\sqrt{y}$: cont. on R

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = -1$: cont. on R

$\dfrac{\partial g}{\partial x} = 1$: cont. on R

By applying Green's Thm จะได้

$$\oint_C (e^{x^2}-y)\,dx + (x+\sin\sqrt{y})\,dy = \iint_R (1-(-1))\,dA$$

$$= 2\iint_R 1\,dA = 2\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{r=0}^{r=2} r\,dr\,d\theta \quad \square$$

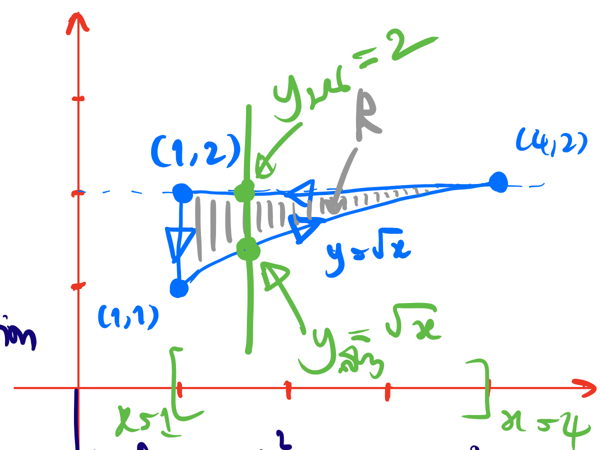
ตัวอย่าง 3. จงหางานที่เกิดจากเคลื่อนที่ของอนุภาคจากจุด $(1,1)$ ไปยัง $(4,2)$ ตามเส้นโค้ง $y=\sqrt{x}$ จากนั้นเคลื่อนที่ตามแนวเส้นตรงไปยังจุด $(1,2)$ และเคลื่อนที่ตามแนวเส้นตรงกลับมาที่จุด $(1,1)$ ในสนามแรง $\mathbf{F}(x,y)=(y^2-\sin x)\mathbf{i}+(xy+\ln x)\mathbf{j}$

วิธีทำ

สังเกต R : simply connected

สังเกต C : simple + closed

+ p.s. + counterclockwise direction



$$R\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x\le 4,\ 1\le y\le 2,\ y\ge\sqrt{x}\right\}$$

สังเกต

$f(x,y)=y^2-\sin x$: cont. on R

$g(x,y)=xy+\ln x$: cont. on R

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=2y$: cont. on R

$\dfrac{\partial g}{\partial x}=y+\dfrac{1}{x}$: cont. on R

By applying Green's Theorem, we have

$$W=\oint_C \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r}=\iint_R\left(y+\frac{1}{x}-2y\right)dA$$

$$=\int_{x=1}^{x=4}\int_{y=\sqrt{x}}^{y=2}\left(\frac{1}{x}-y\right)dy\,dx$$

$\square$

ในอีกด้านหนึ่ง การประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทของกรีน เราสามารถใช้ปริพันธ์ตามเส้นคำนวณหาพื้นที่ A ของบริเวณ R ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขในทฤษฎีบทของกรีนได้โดย

$$\begin{aligned} A &= \oint_C x\,dy \\ &= \oint_C (-y)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\oint_C (-y)\,dx + x\,dy \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4. จงใช้ปริพันธ์ตามเส้นคำนวณหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งปิดล้อมด้วยวงรี

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

วิธีทำ, กำหนด $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ \forall t \in [0, 2\pi]$

$$\Rightarrow A = \oint_C x\,dy = \int_{t=0}^{t=2\pi} (a\cos t)(b\cos t)\,dt$$

$$= \int_{t=0}^{t=0} ab\cos^2 t\,dt$$

หรือ $A = \frac{1}{2}\oint_C (-y)\,dx + \frac{1}{2}\oint_C x\,dy$

$$= \frac{1}{2}\int_{t=0}^{t=2\pi} (-b\sin t)(-a\sin t)\,dt + \frac{1}{2}\int ab\cos^2 t\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t=0}^{t=2\pi} (ab)[\sin^2 t + \cos^2 t]\,dt = \frac{ab}{2}\int_{t=0}^{t=2\pi} 1\,dt$$

$$= \frac{(ab)2\pi}{2} = ab\pi \quad \square$$

ตัวอย่าง 5. จงใช้ปริพันธ์ตามเส้นคำนวณหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งปิดล้อมด้วยรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีจุดยอดเป็น $(0,0)$, $(a,0)$ และ $(0,b)$ โดยที่ $a,b>0$