Calculus for Engineering III SC402202

Lecture 25 The Divergence Theorem and Stokes' Theorem

Chapter 4 Vector Calculus

[1] ในส่วนแรกนี้ เราจะศึกษาทฤษฎีบทที่ช่วยในการคำนวณฟลักซ์ที่ผ่านออกจากพื้นผิวซึ่งปิดล้อมบริเวณในปริภูมิ 3 มิติ ซึ่งเรารู้จักกันในชื่อทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์ จากนั้นเราจะศึกษาทฤษฎีบทที่ช่วยในการคำนวณหางานที่เกิดจากการเคลื่อนที่อนุภาคตามเส้นโค้งในปริภูมิ 3 มิติภายใต้สนามแรงที่กำหนดให้ ซึ่งเรารู้จักกันในชื่อทฤษฎีบทของสโตกส์

บทนิยาม 1. ให้ $\mathbf{F}(x,y,z) = f(x,y,z)\mathbf{i} + g(x,y,z)\mathbf{j} + h(x,y,z)\mathbf{k}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ

1. **ตัวดำเนินการไดเวอร์เจนซ์** (Divergence operator) ของ $\mathbf{F}$ เขียนแทนด้วย $\mathrm{div}\mathbf{F}$ และกำหนดโดย

$$\mathrm{div}\mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$$

เป็นจำนวนจริง

2. **ตัวดำเนินการเคิร์ล** (Curl operator) ของ $\mathbf{F}$ เขียนแทนด้วย $\mathrm{curl}\mathbf{F}$ และกำหนดโดย

$$\mathrm{curl}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

หมายเหตุ 1.

1. เราสามารถจำตัวดำเนินการเคิร์ลได้ดังนี้

$$\mathrm{curl}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix}$$

2. ตัวดำเนินการไดเวอร์เจนซ์จะเกี่ยวข้องกับการไหลของของไหลซึ่งไหลออกจากจุดหนึ่ง ๆ ในปริภูมิ 3 มิติ ส่วนตัวดำเนินการเคิร์ลจะเกี่ยวข้องกับการหมุนของของไหลรอบจุดหนึ่ง ๆ ในปริภูมิ 3 มิติ

[1] **ABD12** : Section 15.7 : 1-4, 5-7, 9-19, 20, 21, 22,
Section 15.8 : 1-4, 5-12, 13-16, 17

ตัวอย่าง 1. จงหาตัวดำเนินการไดเวอร์เจนซ์และตัวดำเนินการเคิร์ลของสนามเวกเตอร์

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \underbrace{x^2y}_{f}\mathbf{i} + \underbrace{2y^3z}_{g}\mathbf{j} + \underbrace{3z}_{h}\mathbf{k}$$

วิธีทำ

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial (x^2y)}{\partial x} + \frac{\partial (2y^3z)}{\partial y} + \frac{\partial (3z)}{\partial z}$$

$$= 2xy + 6y^2z + 3$$

และ

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = \left|\begin{array}{ccc|cc} i & j & k & i & j \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ x^2y & 2y^3z & 3z & x^2y & 2y^3z \end{array}\right|$$

$$= \frac{\partial (3z)}{\partial y}i + \frac{\partial (x^2y)}{\partial z}j + \frac{\partial (2y^3z)}{\partial x}k$$

$$- \frac{\partial (x^2y)}{\partial y}k - \frac{\partial (2y^3z)}{\partial z}i - \frac{\partial (3z)}{\partial x}j$$

$$= 0i + 0j + 0k - x^2k - 2y^3i - 0j$$

$$= -2y^3i - x^2k$$

$\square$

ทฤษฎีบท 1 (ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์/ ทฤษฎีบทของเกาส์). *ให้ G เป็นทรงตันที่มีพื้นผิวเป็น σ ซึ่งมีทิศทางด้านนอก ถ้าฟังก์ชันส่วนประกอบของ*

$$\mathbf{F}(x,y,z) = f(x,y,z)\mathbf{i} + g(x,y,z)\mathbf{j} + h(x,y,z)\mathbf{k}$$

เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตเปิดที่บรรจุ σ แล้ว

$$\iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = \iiint_G \mathrm{div}\mathbf{F}dV$$

หมายเหตุ 2. จากทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์จะได้ว่าฟลักซ์ของสนามเวกเตอร์ที่ไหลออกจากพื้นผิวปิดหาได้จากปริพันธ์สามชั้นของตัวดำเนินการไดเวอร์เจนซ์บนทรงตันซึ่งถูกปิดล้อมด้วยพื้นผิวปิดนั้น ๆ นั่นเอง

ตัวอย่าง 2. กำหนดให้ σ เป็นพื้นผิวลูกบาศก์และมีทิศทางออกดัง Figure 1

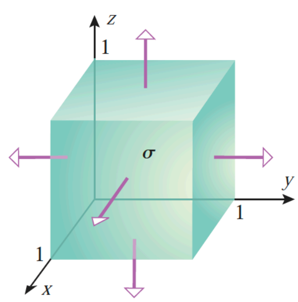

Figure 1: ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1141)

จงใช้ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์หาค่าฟลักซ์

$$\iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$$

ของสนามแรง $\mathbf{F}(x,y,z) = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ ที่ผ่านออกจากพื้นผิว σ

วิธีทำ. $G = \{(x,y,z) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1\}$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 2 + 3 + 2z = 2z + 5$$

$$\Rightarrow \iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = \iiint_G (2z+5)dV = \int_{z=0}^{z=1}\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=0}^{x=1} (2z+5)\,dx\,dy\,dz$$

$$= 6 \quad \square$$

ตัวอย่าง 3. กำหนดให้ $a > 0$ จงใช้ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์หาค่าฟลักซ์ด้านนอก

$$\iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

ของสนามเวกเตอร์ $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} - 3y\mathbf{j} + 5z\mathbf{k}$ ที่ผ่านพื้นผิวของบริเวณ G ที่ปิดล้อมด้วยครึ่งวงกลม $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ และระนาบ $z = 0$

ตัวอย่าง 4. จงใช้ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์หาค่าฟลักซ์ด้านนอก

$$\iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

ของสนามเวกเตอร์ $\mathbf{F}(x,y,z) = (5x^3 + 12xy^2)\mathbf{i} + (y^3 + e^y \sin z)\mathbf{j} + (5z^3 + e^y \cos z)\mathbf{k}$ ที่ผ่านพื้นผิวของบริเวณ G ที่ปิดล้อมด้วยวงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ และ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ เหนือระนาบ $z = 0$

ในลำดับต่อไปนี้ เราจะศึกษาทฤษฎีบทซึ่งเป็นกรณีทั่วไปของทฤษฎีบทของกรีนในบริบทของปริภูมิ 3 มิติซึ่งเกี่ยวข้องกับการหมุนของของไหลดังนี้

ให้ σ เป็นพื้นผิวมีทิศทางซึ่งปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง C ที่เป็นเส้นโค้งอย่างง่ายและปิด ดัง Figure 2 (a)

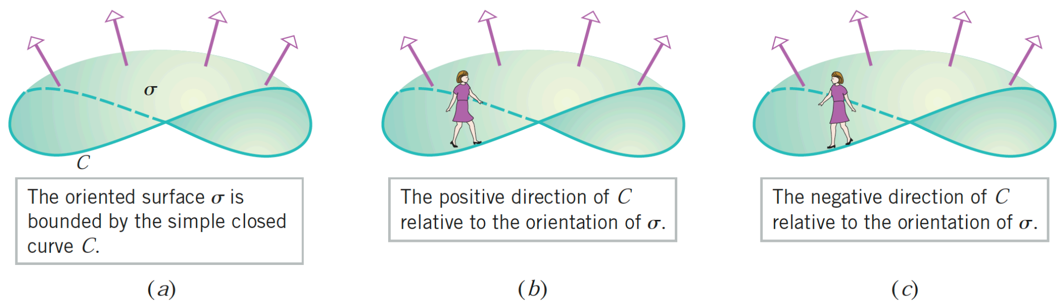

Figure 2: ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1159)

เราจะพบความสัมพันธ์ของ σ และ C ได้เป็น 2 ลักษณะดังนี้

สมมติให้ น.ส.เอ เดินไปตามเส้นโค้ง C โดยที่ศีรษะของเธออยู่ในทิศทางเดียวกับทิศทางของ σ เราจะกล่าวว่า น.ส.เอเดินไปใน

1. **ทิศทางบวก** (positive orientation) ของ σ ถ้าพื้นผิว σ อยู่ด้านซ้ายมือของน.ส.เอ ดัง Figure 2 (b)

2. **ทิศทางลบ** (negative orientation) ของ σ ถ้าพื้นผิว σ อยู่ด้านขวามือของน.ส.เอ ดัง Figure 2 (c)

ทฤษฎีบท 2 (ทฤษฎีบทของสโตกส์). *ให้ σ เป็นพื้นผิวในปริภูมิ 3 มิติที่มีทิศทางและปรับเรียบเป็นช่วง และมีขอบเป็นเส้นโค้ง C ที่เป็นเส้นโค้งอย่างง่าย ปิด ปรับเรียบเป็นช่วง และมีทิศทางบวก ถ้าฟังก์ชันส่วนประกอบของ*

$$\mathbf{F}(x,y,z) = f(x,y,z)\mathbf{i} + g(x,y,z)\mathbf{j} + h(x,y,z)\mathbf{k}$$

เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตเปิดที่บรรจุ σ แล้ว งานที่เกิดจากการเคลื่อนที่อนุภาคไปตามเส้นโค้ง C ภายใต้สนามแรง $\mathbf{F}$ คือ

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_\sigma (\mathrm{curl}\mathbf{F})\cdot \mathbf{n}\, dS$$

หมายเหตุ 3. สังเกตว่าทฤษฎีบทของสโตกส์ช่วยในการคำนวณงานของการเคลื่อนที่รอบเส้นโค้งปรับเรียบเป็นช่วงในปริภูมิ 3 มิติได้สะดวกขึ้น

ตัวอย่าง 5. กำหนดให้ C เป็นเส้นโค้งที่เป็นขอบเขตของบริเวณซึ่งเป็นส่วนของระนาบ $2x+y+z=2$ ในอัฐภาคที่ 1 และ $\mathbf{F}(x,y,z) = xz\mathbf{i}+xy\mathbf{j}+3xz\mathbf{k}$ จงหางาน $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ ของการเคลื่อนที่ของอนุภาคตามเส้นโค้ง C ภายใต้สนามแรง $\mathbf{F}$

ตัวอย่าง 6. จงหางาน $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ของการเคลื่อนที่ของอนุภาคภายใต้สนามแรง $\mathbf{F}(x,y,z) = x^2\mathbf{i} + 4xy^3\mathbf{j} + xy^2\mathbf{k}$ ตามเส้นโค้ง C ที่เป็นขอบเขตของบริเวณซึ่งเป็นส่วนของระนาบ $z = y$ ดัง Figure 3

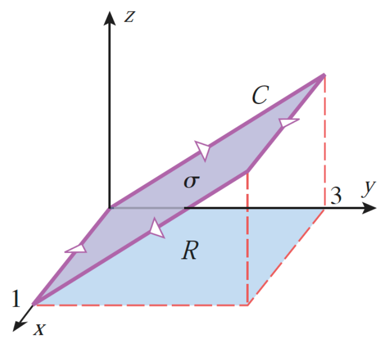

Figure 3: ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1159)