4.1 ทฤษฎีสมการเชิงเส้นอันดับสูง

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาบทนิยามและทฤษฎีบทพื้นฐานที่ใช้ในการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงเส้นอันดับสูง

4.1.1 ปัญหาค่าเริ่มต้นและปัญหาค่าขอบ

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ กล่าวถึงสถานการณ์ที่ทำให้ปัญหาค่าเริ่มต้นมีผลเฉลยเพียงตัวเดียวบนบางช่วงของจำนวนจริง ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

ทฤษฎีบท 1. (การมีอยู่จริงเพียงหนึ่งเดียวของผลเฉลยบนบางช่วง)
พิจารณาปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y); \quad y(x_0) = y_0$$

ถ้า f *และ* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนบริเวณรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก (rectangle)*

$$R := \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : a < x < b, c < y < d\}$$

ที่บรรจุจุด (x_0, y_0) *แล้ว ปัญหาค่าเริ่มต้นจะมีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียวบนช่วง* $I_0 := (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a,b)$ *ที่ผลเฉลยนี้นิยามได้ สำหรับบางค่าคงตัว* δ *ที่มีค่าเป็นบวก*

ถ้าสมมติให้ $y(x)$ เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y); \qquad y(x_0) = y_0$$

บนบางช่วง I และ จุด (x_0, y_0) อยู่ในบริเวณรูปสี่เหลี่ยม R เงื่อนไขความต่อเนื่องของฟังก์ชัน $f(x,y)$ บน R เป็นเงื่อนไขเพียงพอในการยืนยันการมีอยู่จริงของผลเฉลยของ

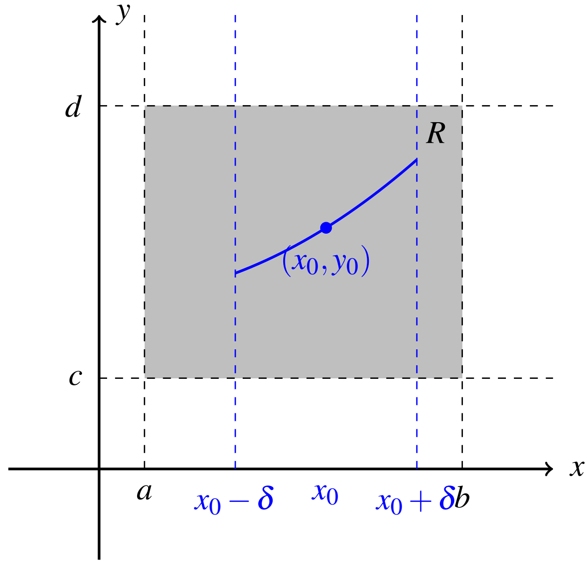

Figure 1: อธิบายลักษณะการมีอยู่จริงเพียงหนึ่งเดียวของผลเฉลยบนบริเวณรูปสี่เหลี่ยม R

ปัญหาค่าเริ่มต้นที่นิยามได้บนบางช่วง I ทั้งนี้ ช่วง I_0 ที่สามารถยืนยันการมีอยู่จริงเพียงหนึ่งเดียวของผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นซึ่งเกิดขึ้นตามทฤษฎีบท 1 อาจไม่เท่ากับช่วง I ก็ได้

พิจารณา ปัญหาค่าเริ่มต้น (initial-value problem)

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x),$$

โดยที่

$$y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_1,\ldots,y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$$

เราทราบว่าสามารถยืนยันการมีอยู่จริงเพียงหนึ่งเดียวของผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นนี้ในกรณีที่ $n=1$ ได้ดังทฤษฎีบท 1

เช่นเดียวกันกับก่อนหน้านี้ เราสามารถยืนยันการมีอยู่จริงของเพียงหนึ่งเดียวของผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นซึ่งเกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูงบนช่วงของจำนวนจริงได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2. (การมีอยู่จริงเพียงหนึ่งเดียวของผลเฉลย)
กำหนดให้ I เป็นช่วงใด ๆ และให้ $x_0 \in I$ พิจารณาปัญหาค่าเริ่มต้น

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x),$$

โดยที่

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

ถ้า $a_n(x), a_{n-1}(x), \ldots, a_1(x), a_0(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง I และ $a_n(x) \neq 0$ สำหรับทุก $x \in I$ แล้ว ปัญหาค่าเริ่มต้นนี้มีผลเฉลย $y(x)$ เพียงหนึ่งเดียวบนช่วง I สำหรับทุกเงื่อนไขเริ่มต้น $y_0, y_1, \ldots, y_n$

ตัวอย่าง 1. จงใช้ทฤษฎีบท 2 แสดงว่าปัญหาค่าเริ่มต้น

$$3y''' + 5y'' - y' + 7y = 0,$$

$$y(1) = 0, y'(1) = 0 \text{ และ } y''(1) = 0$$

มีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียวบน $(-\infty, +\infty)$

ตัวอย่าง 2. จงใช้ทฤษฎีบท 2 แสดงว่าฟังก์ชัน $y = 3e^{2x} + e^{-2x} - 3x$ เป็นผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียวของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y'' - 4y = 12x, \quad y(0) = 4, y'(0) = 1$$

สังเกตว่า สมมติฐาน $a_i(x), i = 1, 2, \ldots, n$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและ $a_n(x) \neq 0$ สำหรับทุก $x \in I$ มีความสำคัญต่อการยืนยันการมีเพียงหนึ่งเดียวของผลเฉลยเป็นอย่างมาก

ตัวอย่าง 3. จงแสดงว่าสำหรับทุกค่าคงตัว $c \in \mathbb{R}$ จะได้ว่าฟังก์ชัน

$$y = cx^2 + x + 3$$

เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 6, \quad y(0) = 3, y'(0) = 1$$

บนช่วง $(-\infty, +\infty)$

จากตัวอย่างข้างต้นจะพบว่า ปัญหาค่าเริ่มต้นนี้มีผลเฉลยเป็นอนันต์ ทั้งนี้หากพิจารณาปัญหาค่าเริ่มต้นนี้เทียบกับเงื่อนไขในทฤษฎีบท 2 จะพบว่าปัญหาค่าเริ่มต้นนี้ไม่สอดคล้องกับทฤษฎีบท 2 กล่าวคือ ค่าฟังก์ชัน $a_2(0)$ มีค่าเป็นศูนย์นั่นเอง

ปัญหาอีกชนิดหนึ่งซึ่งเกี่ยวข้องกับการหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้นอันดับสูงที่มีความสำคัญอย่างมากเช่นเดียวกับปัญหาค่าเริ่มต้น คือ **ปัญหาค่าขอบ** (boundary-value problem, BVP)

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x),$$

$$\text{โดยที่ } y(a)=y_0 \quad \text{และ} \quad y'(b)=y_1$$

ซึ่งเราจะเรียก $y(a)=y_0$ และ $y(b)=y_1$ ที่กำหนดให้นี้ว่า **เงื่อนไขขอบ** (boundary condition) นอกจากนี้เงื่อนไขขอบอาจเขียนอยู่ในรูปแบบอื่น เช่น

$$y'(a)=y_0 \qquad \text{และ} \qquad y(b)=y_1$$

$$y(a)=y_0 \qquad \text{และ} \qquad y'(b)=y_1$$

$$y'(a)=y_0 \qquad \text{และ} \qquad y'(b)=y_1$$

โดยที่ y_0 และ y_1 เป็นค่าคงตัว

ถึงแม้ว่าเงื่อนไขในปัญหาค่าขอบจะสอดคล้องกับทฤษฎีบท 2 อย่างไรก็ตาม เราไม่สามารถยืนยันได้ว่าผลเฉลยของปัญหาค่าขอบจะมีเพียงหนึ่งเดียวเท่านั้นหรือไม่ ซึ่งในบางครั้งปัญหาค่าขอบอาจไม่มีผลเฉลยก็เป็นได้

ตัวอย่าง 4. พิจารณาวงศ์ของฟังก์ชัน $x = c_1 \cos 4t + c_2 \sin 4t$ ซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$x'' + 16x = 0$$

(Verify?) จงพิจารณาว่าปัญหาค่าขอบที่มีเงื่อนไขขอบที่กำหนดให้ต่อไปนี้มีผลเฉลยหรือไม่

1. เงื่อนไขขอบ $x(0) = 0$ และ $x(\pi/2) = 0$
2. เงื่อนไขขอบ $x(0) = 0$ และ $x(\pi/8) = 0$
3. เงื่อนไขขอบ $x(0) = 0$ และ $x(\pi/2) = 1$

4.1.2 สมการเชิงเส้นเอกพันธุ์

บทนิยาม 1. เราจะเรียกสมการเชิงเส้นอันดับ n

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0 \tag{1}$$

ว่า **สมการเอกพันธุ์** (homogeneous equation) และจะเรียกสมการเชิงเส้นอันดับ n

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x) \tag{2}$$

โดยที่ $g(x)\neq 0$ ว่า **สมการไม่เอกพันธุ์** (nonhomogeneous equation)

ตัวอย่างเช่น สมการเชิงเส้นอันดับสอง

$$2y''+y'-7y=0$$

เป็นสมการเอกพันธุ์ อย่างไรก็ตาม สมการเชิงเส้นอันดับสาม

$$x^2y'''+5y=e^x$$

เป็นสมการไม่เอกพันธุ์

ในการศึกษาการหาผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์และไม่เอกพันธุ์นั้น เราจะสมมติให้สมมติฐานต่อไปนี้เป็นจริงบนช่วง I ใด ๆ เสมอ

1. ฟังก์ชันสัมประสิทธิ์ $a_i(x), i=1,\ldots,n$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง สำหรับทุก $x\in I$
2. $a_n(x)\neq 0$ สำหรับทุก $x\in I$

ในส่วนต่อไปนี้ เราจะกล่าวถึงการสร้างผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์จากผลเฉลยที่ทราบก่อนแล้ว กล่าวคือ ถ้าเรานำผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์ตั้งแต่ 2 ตัวขึ้นไปมารวมกัน แล้วผลรวมของผลเฉลยเหล่านั้นยังคงเป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์นั้นด้วย โดย

จะเรียกหลักการนี้ว่า **หลักการทับซ้อน** (superposition principle) ซึ่งมีรายละเอียดดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3 (หลักการทับซ้อนของสมการเอกพันธุ์). *ให้* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์อันดับ* n

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

บนช่วง I *จะได้ว่า ผลรวมเชิงเส้น*

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$$

โดยที่ $c_i, i = 1\ldots, n$ *เป็นค่าคงตัวใด ๆ เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์นี้ด้วย*

สังเกตว่าผลเฉลยชัด $y = 0$ เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์เสมอ (Why?)

ตัวอย่าง 5. จงแสดงว่า $y_1 = x^2$ และ $y_2 = x^2 \ln x$ เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์

$$x^3y''' - 2xy' + 4y = 0$$

จงแสดงว่าฟังก์ชัน $y = c_1x^2 + c_2x\ln x$ เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์นี้บนช่วง $(0, +\infty)$

ในส่วนต่อไป เราจะกล่าวถึงสมบัติของผลเฉลยที่สำคัญมากในการศึกษาสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์ดังนี้

บทนิยาม 2. เราจะกล่าวว่าเซตของฟังก์ชัน $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ **ไม่อิสระเชิงเส้น** (linearly dependent) บนช่วง I ถ้า มีค่าคงตัว $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกันและทำให้

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0$$

สำหรับทุก $x \in I$ และเราจะเรียกเซตของฟังก์ชันที่ไม่เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้นบนช่วง I ว่า **อิสระเชิงเส้น** (linearly independent)

ตัวอย่าง 6. 1. จงแสดงว่าเซตของฟังก์ชัน $f_1(x) = \sin 2x$ และ $f_2(x) = \sin x \cos x$ ไม่อิสระเชิงเส้นบน $(-\infty, +\infty)$

2. จงแสดงว่าเซตของฟังก์ชัน $f_1(x) = x$ และ $f_2(x) = |x|$ อิสระเชิงเส้นบน $(-\infty, +\infty)$

สังเกตว่า ถ้าเซตของฟังก์ชัน $f_1(x)$ และ $f_2(x)$ อิสระเชิงเส้นบนช่วง I แล้ว $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$ จะไม่เป็นค่าคงตัวบนช่วง I (Why?)

ตัวอย่าง 7. จงแสดงว่าเซตของฟังก์ชัน $f_1(x) = \cos^2 x, f_2(x) = \sin^2 x, f_3(x) = \sec^2 x$ และ $f_4(x) = \tan^2 x$ ไม่อิสระเชิงเส้นบนช่วง $(-\pi/2, \pi/2)$

สังเกตว่า ถ้ามีฟังก์ชันอย่างน้อยหนึ่งฟังก์ชันที่เขียนอยู่ในรูปของผลรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันอื่น ๆ ในเซตของฟังก์ชันที่พิจารณาได้ แล้วเซตของฟังก์ชันนั้น ๆ จะไม่อิสระเชิงเส้น

ตัวอย่าง 8. จงแสดงว่าเซตของฟังก์ชัน $f_1(x) = \sqrt{x} + 5, f_2(x) = \sqrt{x} + 5x, f_3(x) = x - 1$ และ $f_4(x) = x^4$ ไม่อิสระเชิงเส้นบน $(0, +\infty)$

สังเกตว่าการตรวจสอบเซตของฟังก์ชันว่าเป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่นั้นค่อนข้างยุ่งยาก ในลำดับต่อไป เราจะกล่าวถึงเครื่องมือที่สำคัญในการตรวจสอบความเป็นอิสระเชิงเส้นของเซตผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์ได้ดังนี้

บทนิยาม 3 (รอนสเกียน)**.** ให้ $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ เป็นฟังก์ชันหาอนุพันธ์ได้อันดับ $n-1$ ขึ้นไป เราจะเรียกตัวกำหนด (determinant)

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n) := \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

ว่า **รอนสเกียน** (Wronskian) ของฟังก์ชัน $f_1, f_2, \ldots, f_n$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้มีประโยชน์มากในการตรวจสอบความเป็นอิสระเชิงเส้นของเซตผลเฉลย

ทฤษฎีบท 4 (ผลเฉลยอิสระเชิงเส้น)**.** *ให้ $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ เป็นเซตของผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์อันดับ n (1) บนช่วง I จะได้ว่า เซตของผลเฉลยอิสระเชิงเส้นบนช่วง I ก็ต่อเมื่อ รอนสเกียน*

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n) \neq 0$$

สำหรับทุก $x \in I$

ในที่นี้ เราจะนิยามเซตของผลเฉลยอิสระเชิงเส้นของสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์อันดับ n ดังนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 4 (เซตผลเฉลยหลักมูล). เราจะเรียกเซตของผลเฉลยอิสระเชิงเส้น $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ ใด ๆ ของสมการเอกพันธุ์อันดับ n (1) บนช่วง I ว่า **เซตผลเฉลยหลักมูล** (fundamental solution set) บนช่วง I

แน่นอนว่า คำถามที่จะต้องเกิดขึ้นคือ เซตผลเฉลยหลักมูลนี้มีอยู่จริงหรือไม่ ซึ่งเราสามารถยืนยันการมีอยู่จริงของเซตผลเฉลยหลักมูลสำหรับสมการเอกพันธุ์ได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 5 (การมีอยู่จริงของเซตผลเฉลยหลักมูล). *สมการเอกพันธุ์อันดับ n (1) ที่นิยามบนช่วง I ใด ๆ จะมีเซตผลเฉลยหลักมูลเสมอ*

ถ้าเราทราบเซตผลเฉลยหลักมูลของสมการเอกพันธุ์บนช่วง I ใด ๆ แล้วจะสามารถหาผลเฉลยทั่วไป (general solution) ของสมการนั้น ๆ ได้โดยใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 6 (ผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์). *ถ้า $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ เป็นเซตของผลเฉลยหลักมูลของสมการเอกพันธุ์อันดับ n (1) บนช่วง I แล้ว ผลเฉลยทั่วไปของสมการนี้บนช่วง I คือ*

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

โดยที่ $c_i, i = 1, \ldots, n$ เป็นค่าคงตัว

จากทฤษฎีบทข้างต้น จะพบว่า ถ้า $y(x)$ เป็นผลเฉลยใด ๆ ของสมการเอกพันธุ์ (1) บนช่วง I ใด ๆ แล้ว เราจะสามารถหาค่าคงตัว $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ที่ทำให้

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

ได้เสมอ

ตัวอย่าง 9. จงแสดงว่า $\{e^{3x}, e^{-3x}\}$ เป็นเซตผลเฉลยหลักมูลของสมการเอกพันธุ์

$$y'' - 9y = 0$$

และจงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์นี้ด้วย

ตัวอย่าง 10. จงแสดงว่า $\{e^x, e^{2x}, e^{3x}\}$ เป็นเซตผลเฉลยหลักมูลของสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์อันดับสาม

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$$

และจงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์นี้

4.1.3 สมการเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์

พิจารณาสมการเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์อันดับ n

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x) \tag{3}$$

ถ้าเราสามารถหาฟังก์ชัน y_p ที่สอดคล้องกับสมการเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์นี้ได้ แล้วจะเรียกฟังก์ชัน y_p นั้น ๆ ว่า **ผลเฉลยเฉพาะ** (particular solution) ของสมการไม่เอกพันธุ์

ตัวอย่าง 11. จงแสดงว่าฟังก์ชันค่าคงตัว $y_p=3$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการไม่เอกพันธุ์

$$y''-9y=27$$

นอกจากนี้ หากเราทราบเซตผลเฉลยหลักมูล $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ ของสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์อันดับ n

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \tag{4}$$

และทราบว่า y_p เป็นผลเฉลยเฉพาะใด ๆ ของสมการเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์ (3) จะได้ว่าผลรวมเชิงเส้นของทุกผลเฉลยในเซตผลเฉลยหลักมูลกับผลเฉลยเฉพาะนั้น ๆ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์ซึ่งมีรายละเอียดดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 7 (ผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์). *ถ้า y_p เป็นผลเฉลยเฉพาะใด ๆ ของสมการไม่เอกพันธุ์อันดับ n (3) บนช่วง I และให้ $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ เป็นเซตของผลเฉลยหลักมูลของสมการเอกพันธุ์อันดับ n (4) บนช่วง I แล้ว ผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์นี้บนช่วง I คือ*

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) + y_p$$

โดยที่ $c_i, i = 1, \ldots, n$ เป็นค่าคงตัว

จากทฤษฎีบทข้างต้นนี้ จะพบว่าผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์เกิดจากผลรวมของฟังก์ชัน $y_c := c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$ ซึ่งเป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ (4) กับฟังก์ชัน y_p ที่เป็นผลเฉลยเฉพาะ ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์คือ

$$y = y_c + y_p$$

และเรียกฟังก์ชัน y_c นี้ว่า **ฟังก์ชันเติมเต็ม** (complementary function) หรือ **ผลเฉลยเติมเต็ม** (complementary solution) ของสมการไม่เอกพันธุ์ (3)

ตัวอย่าง 12. จงแสดงว่า $y_p = -\frac{11}{12} - \frac{1}{2}x$ เป็นผลเฉลยของสมการไม่เอกพันธุ์

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 3x$$

และจงใช้ผลเฉลยหลักมูลในตัวอย่าง 10 หาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์นี้

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นเครื่องมือสำคัญในการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการไม่เอกพันธุ์

ทฤษฎีบท 8 (หลักการทับซ้อนสำหรับสมการไม่เอกพันธุ์). *ถ้า* y_{p_i} *เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการไม่เอกพันธุ์*

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g_i(x)$$

สำหรับทุก $i = 1, 2, \ldots, k$ *แล้ว*

$$y_p := y_{p_1} + y_{p_2} + \cdots + y_{p_k}$$

เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการไม่เอกพันธุ์

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = \sum_{i=1}^{k} g_i(x)$$

ตัวอย่าง 13. จงแสดงว่า

1. $y_{p_1} = -4x^2$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของ $y'' - 3y' + 4y = -16x^2 + 24x - 8$
2. $y_{p_2} = e^{2x}$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของ $y'' - 3y' + 4y = 2e^{2x}$
3. $y_{p_1} = xe^x$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของ $y'' - 3y' + 4y = 2xe^x - e^x$

และจงใช้หลักการทับซ้อนของสมการไม่เอกพันธุ์หาผลเฉลยเฉพาะของ

$$y'' - 3y' + 4y = -16x^2 + 24x - 8 + 2e^{2x} + 2xe^x - e^x$$

แบบฝึกหัด

กำหนดให้วงศ์ของฟังก์ชันที่เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงเส้นต่อไปนี้ จงหาสมาชิกของวงศ์ที่เป็นเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นนั้น ๆ

แบบฝึกหัด 1. $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$, $(-\infty,+\infty)$; $y'' - y = 0$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$

แบบฝึกหัด 2. $y = c_1e^{4x} + c_2e^{-x}$, $(-\infty,+\infty)$; $y'' - 3y' - 4y = 0$, $y(0) = 1, y'(0) = 2$

แบบฝึกหัด 3. $y = c_1x + c_2x\ln x$, $(0,+\infty)$; $x^2y'' - xy' + y = 0$, $y(1) = 3, y'(1) = -1$

กำหนดให้ $y = c_1e^x\cos x + c_2e^x\sin x$ เป็นวงศ์ของฟังก์ชันที่เป็นผลเฉลยของสมการเชิงเส้น $y'' - 2y' + 2y = 0$ บนช่วง $(-\infty,+\infty)$ จงพิจารณาว่ามีฟังก์ชันในวงศ์ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบที่กำหนดให้ต่อไปนี้หรือไม่ ถ้ามี จงระบุสมาชิกนั้น

แบบฝึกหัด 4. $y(0) = 1, y'(\pi) = 0$

แบบฝึกหัด 5. $y(0) = 1, y(\pi) = -1$

แบบฝึกหัด 6. $y(0) = 1, y(\pi/2) = 1$

แบบฝึกหัด 7. $y(0) = 0, y(\pi) = 0$

จงแสดงว่าเซตของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นเซตผลเฉลยหลักมูลของสมการเอกพันธุ์บนช่วงที่กำหนดให้ และจงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์นั้น ๆ

แบบฝึกหัด 8. $\{e^{-3x}, e^{4x}\}$, $y'' - y' - 12y = 0$, $(-\infty,+\infty)$

แบบฝึกหัด 9. $\{\cosh 2x, \sinh 2x\}$, $y'' - 4y = 0$, $(-\infty,+\infty)$

แบบฝึกหัด 10. $\{e^x\cos 2x, e^x\sin 2x\}$, $y'' - 2y' + 5y = 0$, $(-\infty,+\infty)$

แบบฝึกหัด 11. $\{e^{x/2}, xe^{x/2}\}$, $4y'' - 4y' + y = 0$, $(\infty,+\infty)$

แบบฝึกหัด 12. $\{x^3, x^4\}$, $x^2y'' - 6xy' + 12y = 0$, $(0,+\infty)$

แบบฝึกหัด 13. $\{\cos(\ln x), \sin(\ln x)\}$, $x^2y'' + xy' + y = 0$, $(0,+\infty)$

แบบฝึกหัด 14. $\{x, x^{-2}, x^{-2}\ln x\}, \quad x^3y''' + 6x^2y'' + 4xy' - 4y = 0, \quad (0, +\infty)$

แบบฝึกหัด 15. $\{1, x, \cos x, \sin x\}, \quad y^{(4)} + y'' = 0, \quad (-\infty, +\infty)$

จงแสดงว่าวงศ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์บนช่วงที่กำหนดให้นั้น ๆ

แบบฝึกหัด 16. $y = c_1\cos x + c_2\sin x + x\sin x + (\cos x)\ln(\cos x)$,
$y'' + y = \sec x, (-\pi/2, \pi/2)$

แบบฝึกหัด 17. $y = c_1x^{-1/2} + c_2x_{-1} + \frac{1}{15}x^2 - \frac{1}{6}x$,
$2x^2y'' + 5xy' + y = x^2 - x, (0, +\infty)$

แบบฝึกหัด 18. จงแสดงว่าฟังก์ชัน $y_{p_1} = 3e^{2x}$ และ $y_{p_2} = x^2 + 3x$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของ

$$y'' - 6y' + 5y = -9e^{2x}$$

และ

$$y'' - 6y' + 5y = 5x^2 + 3x - 16$$

แบบฝึกหัด 19. จากแบบฝึกหัด 18 จงหาผลเฉลยเฉพาะของ

$$y'' - 6y' + 5y = 5x^2 + 3x - 16 - 9e^{2x}$$

และ

$$y'' - 6y' + 5y = -10x^2 - 6x + 32 + e^{2x}$$