4.2 การลดทอนอันดับ

พิจารณาสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{1}$$

เราทราบมาแล้วว่าผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ (1) อยู่ในรูปผลรวมเชิงเส้น

$$y = c_1y_1 + c_2y_2$$

โดยที่ y_1 และ y_2 เป็นผลเฉลยในเซตผลเฉลยหลักมูลบนช่วง I

สมมติว่าเราทราบว่า $y_1(x)$ เป็นผลเฉลยที่ไม่เป็นผลเฉลยชัดของสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์ (1) บนช่วง I แล้วจะสามารถหาผลเฉลยที่สอง $y_2(x)$ จากผลเฉลย $y_1(x)$ ที่ทราบอยู่ก่อนได้ดังการพิจารณาต่อไปนี้

เนื่องจากผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์ (1) อยู่ในรูปผลรวมเชิงเส้น $y = c_1y_1 + c_2y_2$ โดยที่ y_1 และ y_2 อิสระเชิงเส้นต่อกันบนช่วง I นั่นคือ จะได้ว่าฟังก์ชัน $\frac{y_2(x)}{y_1(x)}$ ไม่เป็นค่าคงตัวบนช่วง I ซึ่งในที่นี้ สมมติให้

$$u(x) := \frac{y_2(x)}{y_1(x)}$$

นั่นคือ

$$y_2(x) = u(x)y_1(x)$$

เราสามารถหาฟังก์ชัน $u(x)$ ได้โดยการแทนค่าฟังก์ชัน $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ ในสมการเชิงอนุพันธ์ (1) ซึ่งจะให้สมการเชิงอนุพันธ์ (1) ลดรูปเป็นสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์อันดับหนึ่ง จากนั้นจะหาผลเฉลยของสมการอันดับหนึ่งนี้ ซึ่งเรียกวิธีการดังกล่าวนี้ว่า **การลดทอนอันดับ** (reduction of order)

ตัวอย่างเช่น พิจารณาสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์

$$y'' - y = 0$$

จะพบว่าฟังก์ชัน $y_1 = e^x$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นี้บนช่วง $(-\infty, +\infty)$ และเราจะหาผลเฉลย y_2 ดังนี้ กำหนดให้

$$y_2 = uy_1$$

นั่นคือ

$$y_2 = ue^x$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$y_2' = ue^x + u'e^x$$

หรือ

$$y_2'' = ue^x + 2u'e^x + u''e^x$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} y_2'' - y_2 &= (ue^x + 2u'e^x + u''e^x) - (ue^x) \\ &= e^x(2u' + u'') \end{aligned}$$

เนื่องจาก y_2 เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นี้ เราจึงได้ว่า

$$0 = y_2'' - y_2 = e^x(2u' + u'')$$

และเนื่องจาก $e^x \neq 0$ เสมอ ทำให้ได้ว่า

$$u'' + 2u' = 0$$

กำหนดให้ $w := u'$ จะได้ว่า สมการเชิงอนุพันธ์นี้กลายเป็น

$$w' + 2w = 0$$

ซึ่งเป็นสมการเอกพันธุ์อันดับหนึ่งและสามารถหาผลเฉลยได้โดยง่ายดังนี้ พิจารณาตัวประกอบปริพันธ์ $e^{\int 2dx} = e^{2x}$ ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$\frac{d}{dx}[e^{2x}w] \;=\; 0$$

นั่นคือ

$$e^{2x}w \;=\; c_1$$

หรือ

$$w \;=\; c_1e^{-2x}$$

เนื่องจาก $w = u'$ จึงได้ว่า

$$\frac{du}{dx} = c_1e^{-2x}$$

นั่นคือ

$$u = \frac{c_1}{-2}e^{-2x} + c_2$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} y_2 = ue^x &= \left(\frac{c_1}{-2}e^{-2x} + c_2\right)e^x \\ &= \frac{c_1}{-2}e^{-x} + c_2e^x \end{aligned}$$

กำหนดให้ $c_2 = 0$ และ $c_1 = -2$ (Why?) จะได้ว่า ผลเฉลยที่ต้องการคือ

$$y_2 = e^{-x}$$

เพราะฉะนั้น เราจึงได้ว่าผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์อันดับสองนี้คือ

$$y = c_1e^x + c_2e^{-x}$$

ตัวอย่าง 1. กำหนดให้ $y_1 = x^3$ เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์อันดับสอง

$$x^2y'' - 6y = 0$$

จงใช้การลดทอนอันดับหาผลเฉลยทั่วไปบนช่วง $(0, +\infty)$

ในกรณีทั่วไป เราสามารถพิจารณาการลดทอนอันดับได้ดังนี้ จากสมการเอกพันธุ์อันดับสองในรูปมาตรฐาน

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

ที่นิยามบนช่วง I สมมติให้ y_1 เป็นผลเฉลยที่ทราบแล้วของ (2) บนช่วง I และไม่เป็นผลเฉลยชัด กำหนดให้ $y_2 := uy_1$ จะได้ว่า

$$y_2' = uy_1' + u'y_1$$

และ

$$y_2'' = u'y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} 0 = y_2'' + Py_2' + Qy_2 &= u'y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' + Puy_1' + Pu'y_1 + Quy_1 \\ &= u(y_1'' + Py_1' + Qy_1) + u''y_1 + u'(2y_1' + Py_1) \end{aligned}$$

และเนื่องจาก $y_1'' + Py_1' + Qy_1 = 0$ (Why?) เราจึงได้ว่า

$$u''y_1 + u'(2y_1' + Py_1) = 0$$

กำหนดให้ $w := u'$ จะได้สมการเอกพันธุ์อันดับหนึ่ง

$$y_1w' + (2y_1' + Py_1)w = 0$$

หรือ

$$w' + \left(\frac{2y' + Py_1}{y_1}\right)w = 0$$

ซึ่งจะได้ตัวประกอบปริพันธ์เป็น

$$e^{\int\left(\frac{2y'+Py_1}{y_1}\right)dx} = y_1^2e^{\int P dx} \quad \text{(Verify?)}$$

นั่นคือ

$$\frac{d}{dx}[y_1^2e^{\int P dx}w] = 0$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$u = c_1 \int \frac{e^{-\int P dx}}{y_1^2} dx + c_2 \qquad \text{(Verify?)}$$

เพราะฉะนั้น

$$y_2 = uy_1 = c_1 y_1 \int \frac{e^{-\int P dx}}{y_1^2} dx + c_2 y_1$$

กำหนดให้ $c_2 = 0$ และ $c_1 = 1$ (Why?) จึงได้ว่า

ผลเฉลยที่สองคือ

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P dx}}{y_1^2} dx$$

ซึ่งแน่นอนว่า เราสามารถแสดงว่า $\{y_1, y_2\}$ ที่ได้นี้เป็นเซตผลเฉลยหลักมูลของสมการเอกพันธุ์อันดับสองที่พิจารณานี้ (Verify?)

ตัวอย่าง 2. กำหนดให้ $y_1 = x^2$ เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์อันดับสอง

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปบนช่วง $(0, +\infty)$

ตัวอย่าง 3. กำหนดให้ $y_1 = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์อันดับสอง

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปบนช่วง $(0, \pi)$

แบบฝึกหัด

จงใช้ผลเฉลย y_1 ที่กำหนดให้หาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์อันดับสองต่อไปนี้บนช่วงที่นิยาม

แบบฝึกหัด 1. $y'' + 4y' = 0; \qquad y_1 = 0$

แบบฝึกหัด 2. $y'' - y' = 0; \qquad y_1 = 1$

แบบฝึกหัด 3. $y'' - 4y' + 4y = 0; \qquad y_1 = e^{2x}$

แบบฝึกหัด 4. $y'' + 2y' + y = 0; \qquad y_1 = xe^{-x}$

แบบฝึกหัด 5. $y'' + 16y = 0; \qquad y_1 = \cos 4x$

แบบฝึกหัด 6. $y'' + 9y = 0; \qquad y_1 = \sin 3x$

แบบฝึกหัด 7. $9y'' - 12y' + 4y = 0; \qquad y_1 = e^{2x/3}$

แบบฝึกหัด 8. $6y'' + y - y' = 0; \qquad y_1 = e^{x/3}$

แบบฝึกหัด 9. $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0; \qquad y_1 = x^2$

แบบฝึกหัด 10. $xy'' + y' = 0; \qquad y_1 = \ln x$

แบบฝึกหัด 11. $4x^2y'' + y = 0; \qquad y_1 = \sqrt{x}\ln x$

แบบฝึกหัด 12. $(1 - 2x - x^2)y'' + 2(1 + x)y' - 2y = 0; \qquad y_1 = x + 1$

แบบฝึกหัด 13. $(1 - x^2)y'' - 2xy' = 0; \qquad y_1 = 1$

แบบฝึกหัด 14. $x^2y'' - xy' + 2y = 0; \qquad y_1 = x\sin(\ln x)$

แบบฝึกหัด 15. $(1 + 2x)y'' + 4xy' - 4y = 0; \qquad y_1 = e^{-2x}$