SC 402 301 Differential Equations	ปีการศึกษา 2/2565

4.3 สมการเชิงเส้นเอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

กลุ่ม 01 และ 02	บทที่ 4 สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสูง

พิจารณาสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์

$$a\frac{dy}{dx} + by = 0 \tag{1}$$

โดย a และ b เป็นค่าคงตัวที่ $a \neq 0$ จะพบว่าสมการเชิงอนุพันธ์นี้เป็นสมการแยกตัวแปรได้และเป็นสมการเชิงเส้น ซึ่งสามารถหาผลเฉลยได้โดยการใช้ตัวประกอบปริพันธ์ ในหัวข้อนี้ เราจะพิจารณาวิธีการหาผลเฉลยอีกแนวทางหนึ่งดังนี้ จากสมการเชิงอนุพันธ์ (1) สามารถจัดรูปได้เป็น

$$\frac{dy}{dx} = \left(-\frac{b}{a}\right)y$$

สังเกตว่าฟังก์ชันที่เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นี้ต้องมีสมบัติว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันดังกล่าวต้องเป็นผลคูณของค่าคงตัวบางค่ากับฟังก์ชันดังกล่าวนี้ ๆ ซึ่งแน่นอนว่าฟังก์ชันที่มีสมบัตินี้ควรจะอยู่ในรูปของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง e^{mx} สำหรับบางค่า m

เพราะฉะนั้น ถ้าเราแทนค่า $y = e^{mx}$ และ $y' = me^{mx}$ ในสมการเชิงอนุพันธ์ (1) จะได้ว่า

$$ame^{mx} + be^{mx} = 0$$

นั่นคือ

$$e^{mx}(am+b) = 0$$

และเนื่องจาก $e^{mx} \neq 0$ เสมอ จึงได้ว่า ผลเฉลยของ (1) จะขึ้นอยู่กับค่า m ที่เป็นรากของพหุนาม $am+b$ นั่นเอง และแน่นอนว่าในที่นี้ $y = e^{\frac{-b}{a}x}$ เป็นผลเฉลยของ (1) ส่งผลให้ได้ว่า $y = ce^{\frac{-b}{a}x}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปสมการเชิงอนุพันธ์ $a\frac{dy}{dx} + by = 0$ นั่นเอง

ในทำนองเดียวกันนี้ เราสามารถพิจารณาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์อันดับ n โดยการเริ่มจากสมการเชิงอนุพันธ์อับดับสองดังนี้ พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{2}$$

โดยที่ a, b และ c เป็นค่าคงตัวที่ $a \neq 0$ พิจารณาผลเฉลยที่อยู่ในรูป $y = e^{mx}$ จะได้ว่า

$$y' = me^{mx}$$

และ

$$y'' = m^2 e^{mx}$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$am^2 e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0$$

นั่นคือ

$$e^{mx}\left(am^2 + bm + c\right) = 0$$

เนื่องจาก $e^{mx} \neq 0$ เสมอ จึงได้ว่า ผลเฉลย $y = e^{mx}$ นี้ขึ้นอยู่กับค่า m ที่เป็นรากของพหุนามดีกรีสอง

$$\boxed{am^2 + bm + c = 0} \tag{3}$$

ซึ่งจะเรียกสมการ (3) นี้ว่า **สมการช่วย** (auxiliary equation) หรือ **สมการลักษณะเฉพาะ** (characteristic equation) ของสมการเชิงอนุพันธ์ (2)

สังเกตว่า ผลเฉลยของ (3) คือ

$$m_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{และ} \qquad m_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

เพราะฉะนั้น พิจารณาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (3) ได้เป็น 3 กรณี คือ

(i) ราก m_1 และ m_2 เป็นจำนวนจริงที่ไม่ซ้ำกัน $(b^2 - 4ac > 0)$

(ii) ราก m_1 และ m_2 เป็นจำนวนจริงที่ซ้ำกัน $(b^2 - 4ac = 0)$

(iii) ราก m_1 และ m_2 เป็นจำนวนซ้อนสังยุค ($b^2-4ac<0$)

กรณี 1 *รากเป็นจำนวนจริงที่ไม่ซ้ำกัน*

เนื่องจากสมการช่วยมีรากจำนวนจริงที่ไม่ซ้ำกัน m_1 และ m_2 จึงได้ว่า

$$y_1 = e^{m_1x} \quad \text{และ} \quad y_2 = e^{m_2x}$$

เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (2) และเนื่องจาก e^{m_1x} และ e^{m_2x} อิสระเชิงเส้นบน $(-\infty,+\infty)$ (Verify?) ส่งผลให้ได้ว่า $\{e^{m_1x}, e^{m_2x}\}$ เป็นเซตผลเฉลยหลักมูลของสมการเชิงอนุพันธ์ (2) เพราะฉะนั้น ผลเฉลยทั่วไปของ (2) บน $(-\infty,+\infty)$ คือ

$$\boxed{y = c_1e^{m_1x}+c_2e^{m_2x}}$$

กรณี 2 *รากเป็นจำนวนจริงที่ซ้ำกัน*

เนื่องจาก $m_1=m_2$ จึงได้ว่า $y=e^{m_1x}$ เป็นผลเฉลยของสมการ (2) จากการลดทอนอันดับ จะได้ผลเฉลยที่สองของสมการ (2) คือ

$$\begin{aligned} y_2 &= e^{m_1x}\int \frac{e^{-\int \frac{b}{a}dx}}{e^{2m_1x}}dx \\ &= e^{m_1x}\int e^{\left(-\frac{b}{a}-2m_1\right)x}dx \end{aligned} \tag{4}$$

และเนื่องจาก $b^2-4ac=0$ จะได้ว่า $m_1=m_2=\frac{-b}{2a}$ ซึ่งทำให้ได้ว่าความสัมพันธ์ (4) กลายเป็น

$$\begin{aligned} y_2 &= e^{m_1x}\int e^{\left(-\frac{b}{a}-\left(-\frac{b}{a}\right)\right)x}dx \\ &= e^{m_1x}\int 1dx \\ &= xe^{m_1x} \end{aligned}$$

เนื่องจากผลเฉลย e^{m_1x} และ xe^{m_1x} อิสระเชิงเส้นบน $(-\infty,+\infty)$ (Verify?) จึงได้ว่า $\{e^{m_1x}, xe^{m_1x}\}$ เป็นเซตผลเฉลยหลักมูลของสมการเชิงอนุพันธ์ (2) เพราะฉะนั้น ผลเฉลยทั่วไปของ (2) บน $(-\infty,+\infty)$ คือ

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x}$$

กรณี 3 *รากเป็นจำนวนเชิงซ้อนสังยุค*

เนื่องจาก m_1 และ m_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน นั่นคือ

$$m_1 = \alpha + i\beta \quad \text{และ} \quad m_2 = \alpha - i\beta$$

โดยที่ α และ β เป็นค่าคงตัวและ $i^2 = -1$ ซึ่งส่งผลให้ได้ว่า (ในทำนองเดียวกับกรณี 1) ผลเฉลยทั่วไปของ (2) บน $(-\infty, +\infty)$ คือ

$$y = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x} \tag{5}$$

ซึ่งสามารถเขียนผลเฉลยนี้ในรูปฟังก์ชันของจำนวนจริงได้ดังนี้

จากสูตรของออยเลอร์

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

โดยที่ θ เป็นค่าคงตัวใด ๆ จึงได้ว่า

$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x \quad \text{(Verify?)}$$

และ

$$e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i\sin\beta x \quad \text{(Verify?)}$$

นั่นคือ สมการ (5) จะกลายเป็น

$$\begin{aligned} y &= e^{\alpha x}[C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x}] \\ &= e^{\alpha x}[C_1(\cos\beta x + i\sin\beta x) + C_2(\cos\beta x - i\sin\beta x)] \\ &= e^{\alpha x}[(C_1 + C_2)\cos\beta x + (C_1 - C_2)i\sin\beta x] \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$y = e^{\alpha x}[c_1\cos\beta x + c_2 i\sin\beta x]$$

โดยที่ $c_1 := C_1 + C_2$ และ $c_2 := C_1 - C_2$ ตามลำดับ

สังเกตว่า ถ้าฟังก์ชันเชิงซ้อนสังยุค $z = u(x) + iv(x)$ เป็นผลเฉลยของ (2) จะได้ว่า

$$z' = u' + iv'$$

และ

$$z'' = u'' + iv''$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$a(u'' + iv'') + b(u' + iv') + c(u + iv) = 0$$

หรือ

$$(au'' + bu' + cu) + i(av'' + bv' + cv) = 0$$

นั่นคือ

$$au'' + bu' + cu = 0$$

และ

$$av'' + bv' + cv = 0$$

ซึ่งหมายความว่า $u(x)$ และ $v(x)$ เป็นผลเฉลยของ (2)

เพราะฉะนั้น

$$e^{\alpha x}\cos\beta x \qquad \text{และ} \qquad e^{\alpha x}\sin\beta x$$

เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (2)

เนื่องจาก $e^{\alpha x}\cos\beta x$ และ $e^{\alpha x}\sin\beta x$ อิสระเชิงเส้นบน $(-\infty, +\infty)$ (Verify?) จึงได้ว่า $\{e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x\}$ เป็นเซตผลเฉลยหลักมูลของสมการเชิงอนุพันธ์ (2) เพราะฉะนั้น ผลเฉลยทั่วไปของ (2) บน $(-\infty, +\infty)$ คือ

$$\boxed{y = c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\sin\beta x}$$

จากการวิเคราะห์ข้างต้น เราสามารถสรุปวิธีการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์อันดับสองได้ดังนี้

วิธีการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์อันดับสอง

พิจารณาสมการเอกพันธุ์

$$ay'' + by' + cy = 0$$

โดยที่ a, b และ c เป็นค่าคงตัวที่ $a \neq 0$

1. หาสมการช่วย

$$am^2 + bm + c = 0$$

2. หารากทั้งหมดของสมการช่วย

3. พิจารณาผลเฉลยทั่วไป ดังนี้

   (i) ถ้าราก m_1 และ m_2 เป็นจำนวนจริงที่ไม่ซ้ำกัน แล้วผลเฉลยทั่วไปบน $(-\infty, +\infty)$ คือ

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$$

   (ii) ถ้าราก m_1 และ m_2 เป็นจำนวนจริงที่ซ้ำกัน แล้วผลเฉลยทั่วไปบน $(-\infty, +\infty)$ คือ

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_2 x}$$

   (iii) ราก m_1 และ m_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนสังยุค โดยที่ $m_1 = \alpha + i\beta$ และ $m_2 = \alpha - i\beta$ แล้วผลเฉลยทั่วไปบน $(-\infty, +\infty)$ คือ

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$$

ตัวอย่าง 1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์อันดับสอง

1. $2y'' - 5y' - 3y = 0$
2. $y'' - 10y' + 25y = 0$
3. $y'' + 4y' + 7y = 0$

ตัวอย่าง 2. กำหนดให้ k เป็นค่าคงตัวใด ๆ จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์อันดับสอง

$$y'' + k^2 y = 0$$

และ

$$y'' - k^2 y = 0$$

ตัวอย่าง 3. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$4y'' + 4y' + 17y = 0, \quad y(0) = -1, y'(0) = 2$$

ในทำนองเดียวกับข้างต้น การหาผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์อันดับสูง

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{6}$$

โดยที่ $a_i, i = 1, \ldots, n$ เป็นค่าคงตัว คือการหารากของพหุนามดีกรี n

$$a_n(x)m^n + a_{n-1}m^{n-1} + \cdots + a_1(x)m + a_0(x) = 0$$

ถ้ารากทั้งหมดเป็นจำนวนจริงที่ไม่ซ้ำกัน จะได้ว่า ผลเฉลยทั่วไปของ (6) คือ

$$y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x} + \cdots + c_ne^{m_nx}$$

ในกรณีที่มีราก $m_1 = m_2 = \cdots = m_k$ ซ้ำกันจำนวน k ราก ส่วนรากที่เหลือ $n-k$ ราก แตกต่างกันทั้งหมด จะได้ว่า ผลเฉลยทั่วไปของ (6) คือ

$$y = c_1e^{m_1x} + c_2xe^{m_1x} + \cdots + c_kx^{k-1}e^{m_1x} + c_{k+1}e^{m_{k+1}x} + \cdots + c_ne^{m_nx}$$

ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์อันดับสาม

$$y''' + 3y'' - 4y = 0$$

ตัวอย่าง 5. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์อันดับสาม

$$3y''' - 19y'' + 36y' - 10y = 0$$

ในกรณีที่รากซ้ำกันจำนวน k ราก กล่าวคือ

$$m_1 = m_2 = \cdots = m_k = \alpha + i\beta$$

จะได้ว่าสังยุค $\alpha - i\beta$ ของรากดังกล่าวนั้นเป็นรากอีก k รากด้วย นั่นคือ

$$m_{k+1} = m_{k+2} = \cdots = m_2 k = \alpha - i\beta$$

และผลเฉลยทั่วไปจะเป็นผลรวมเชิงเส้นของผลเฉลย

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}x\cos\beta x, \ldots, e^{\alpha x}x^{k-1}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x, e^{\alpha x}x\sin\beta x, \ldots, e^{\alpha x}x^{k-1}\sin\beta x$$

และผลเฉลยที่เหลืออีก $n-2k$ ตัว ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์อันดับสี่

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$$

ตัวอย่าง 7. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y'' - 4y' + 13y = 0, \quad y(0) = -1, y'(0) = 2$$

แบบฝึกหัด

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์อันดับสองต่อไปนี้

แบบฝึกหัด 1. $3y'' - y' = 0$

แบบฝึกหัด 2. $2y'' + 5y' = 0$

แบบฝึกหัด 3. $y'' - 16y = 0$

แบบฝึกหัด 4. $y'' + 9y = 0$

แบบฝึกหัด 5. $4y'' + y = 0$

แบบฝึกหัด 6. $y'' - 3y' + 2y = 0$

แบบฝึกหัด 7. $y'' - y' - 6y = 0$

แบบฝึกหัด 8. $\frac{d^2y}{dx^2} + 8\frac{dy}{dx} + 16y = 0$

แบบฝึกหัด 9. $\frac{d^2y}{dx^2} - 10\frac{dy}{dx} + 25y = 0$

แบบฝึกหัด 10. $y'' + 3y' - 5y = 0$

แบบฝึกหัด 11. $y'' + 4y' - y = 0$

แบบฝึกหัด 12. $12y'' - 5y' - 2y = 0$

แบบฝึกหัด 13. $8y'' + 2y' - y = 0$

แบบฝึกหัด 14. $2y'' - 3y' + 4y = 0$

แบบฝึกหัด 15. $2y'' + 2y' + y = 0$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์อันดับสูงต่อไปนี้

แบบฝึกหัด 16. $y''' - 4y'' - 4y' = 0$

แบบฝึกหัด 17. $4y''' + 4y'' + y' = 0$

แบบฝึกหัด 18. $y''' - y = 0$

แบบฝึกหัด 19. $y''' + 5y'' = 0$

แบบฝึกหัด 20. $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = 0$

แบบฝึกหัด 21. $y''' + 3y'' - 4y' - 12y = 0$

แบบฝึกหัด 22. $y''' - y'' - 4y = 0$

แบบฝึกหัด 23. $y''' + y'' - 2y = 0$

แบบฝึกหัด 24. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

แบบฝึกหัด 25. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

แบบฝึกหัด 26. $y^{(4)} + y''' + y'' = 0$

แบบฝึกหัด 27. $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$

แบบฝึกหัด 28. $16y^{(4)} + 24y^{(2)} + 9y = 0$

แบบฝึกหัด 29. $y^{(4)} - 7y'' - 18y = 0$

แบบฝึกหัด 30. $y^{(5)} + 5y^{(4)} - 2y''' - 10y'' + y' + 5y = 0$