SC 402 301 Differential Equations ปีการศึกษา 2/2565

4.4 สมการเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

4.4.1 การหาผลเฉลยโดยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ตามหลักการทับซ้อน

กลุ่ม 01 และ 02 บทที่ 4 สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสูง

เราทราบแล้วว่าผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x) \tag{1}$$

จะอยู่ในรูป

$$y=y_c+y_p$$

โดยที่ y_c ผลเฉลยเติมเต็มที่เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0 \tag{2}$$

ซึ่งในหัวข้อที่ผ่านมาได้ศึกษาการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (2) ในกรณีที่สัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวมาแล้ว และ y_p เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ (1) หากยังจำได้ ในหัวข้อ 4.1 เราสามารถใช้การตรวจพินิจตรวจสอบว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงเส้นที่พิจารณาหรือไม่ ในหัวข้อนี้จะให้ความสนใจกับการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว กล่าวคือ จะศึกษาวิธีการหาผลเฉลยเฉพาะ y_p ของสมการเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์ ใน 2 แนวทาง คือ (1) การเทียบสัมประสิทธิ์ตามหลักการทับซ้อน และ (2) การแปรผันตัวแปร ดังนี้

ในส่วนนี้ เราจะศึกษาวิธีการหาผลเฉลยเฉพาะ y_p โดยการพิจารณารูปแบบของฟังก์ชันที่สัมพันธ์กับฟังก์ชัน $g(x)$ ในสมการเชิงอนุพันธ์ (1) ซึ่งจะเรียกหลักการนี้ว่า

วิธีการเทียบสัมประสิทธิ์ (method of undetermined coefficients) โดยมีข้อตกลงเบื้องต้น คือ

ข้อตกลงเบื้องต้น

1. สัมประสิทธิ์ $a_i, i = 0, 1, \ldots, n$ เป็นค่าคงตัว
2. ฟังก์ชัน $g(x)$ เป็นค่าคงตัว พหุนาม ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง ฟังก์ชันไซน์ ฟังก์ชันโคไซน์ หรือผลรวมและผลคูณของฟังก์ชันเหล่านี้เท่านั้น

ตัวอย่างของฟังก์ชัน $g(x)$ ที่สอดคล้องกับข้อตกลงเบื้องต้น เช่น

$$g(x) = 5 \qquad g(x) = 3x - 2 + e^{-4x} \qquad g(x) = \cos 2x - 3\sin x$$

$$g(x) = \sin 3x - 5x\cos 2x \qquad \text{และ} \qquad g(x) = xe^x \cos x + (x^2 + 5)e^{-3x}$$

เป็นต้น ทั้งนี้ เราไม่สามารถใช้การเทียบสัมประสิทธิ์เพื่อหาผลเฉลยเฉพาะ y_p ในกรณีเช่น

$$g(x) = \frac{1}{x} \qquad g(x) = \ln x \qquad g(x) = \tan x \qquad \text{และ} \qquad \sin^{-1} x$$

เป็นต้น

หากเราลองพิจารณาฟังก์ชันค่าคงตัว พหุนาม ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง ฟังก์ชันไซน์ ฟังก์ชันโคไซน์ หรือผลรวมและผลคูณของฟังก์ชันเหล่านี้ จะพบว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันเหล่านี้ยังคงอยู่ในรูปของฟังก์ชันในกลุ่มนี้เสมอ และจากความจริงที่ว่าถ้าฟังก์ชัน y_p เป็นผลเฉลยของสมการ (1) เราจะต้องได้ว่า

$$a_n(x)\frac{d^n y_p}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y_p}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy_p}{dx} + a_0(x)y_p = g(x)$$

ดังนั้น ฟังก์ชัน y_p ที่จะเป็นผลเฉลยของสมการ (1) จึงควรมีรูปแบบเดียวกันกับฟังก์ชัน $g(x)$ นี้ด้วย

ทั้งนี้ เราสามารถสรุปวิธีการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์อันดับสูงโดยการเทียบสัมประสิทธิ์ตามหลักการทับซ้อนได้ดังนี้

วิธีการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์อันดับสูง

พิจารณาสมการไม่เอกพันธุ์

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

โดยที่ $a_i, i=1,\ldots,m$ และ $g(x)$ เป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้น

1. หาผลเฉลยเติมเต็ม y_c
2. กำหนดรูปแบบ y_p จากฟังก์ชัน $g(x)$ และเทียบสัมประสิทธิ์ ถ้าฟังก์ชัน $g(x)$ เกิดจากผลรวมของหลายพจน์ ให้ใช้หลักการทับซ้อนในการหาผลเฉลยแต่ละพจน์
3. ผลเฉลยทั่วไป คือ

$$y=y_c+y_p$$

ตัวอย่าง 1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์อันดับสอง

$$y''+4y'-2y=2x^2-3x+6$$

ตัวอย่าง 2. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์อันดับสอง

$$y'' - y' + y = 2\sin 3x$$

ตัวอย่าง 3. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์อันดับสอง

$$y'' - 2y' - 3y = 4x - 5 + 6xe^{2x}$$

ในตัวอย่างข้างต้นนี้ เราสามารถแยกพิจารณาการหาผลเฉลยเฉพาะ y_{p_1} และ y_{p_2} ได้ และในขั้นตอนสุดท้าย โดยหลักการทับซ้อน จะได้ว่า ผลเฉลยทั่วไปยังคงอยู่ในรูป

$$y = y_c + y_{p_1} + y_{p_2}$$

ตัวอย่าง 4. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์อันดับสอง

$$y'' - 5y' + 4y = 8e^x$$

จากตัวอย่างทั้งหมดข้างต้น พบว่าการกำหนดรูปแบบฟังก์ชัน y_p จะขึ้นอยู่กับรูปแบบของฟังก์ชัน $g(x)$ และในบางครั้งขึ้นอยู่กับผลเฉลยเติมเต็ม y_c ด้วย และเพื่อให้การกำหนดรูปแบบ y_p สะดวกยิ่งขึ้น จะพิจารณาเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณี 1 ฟังก์ชัน $g(x)$ ไม่ซ้ำกับผลเฉลยเติมเต็ม y_c

ถ้าไม่มีพจน์ใดของฟังก์ชัน $g(x)$ ซ้ำกับฟังก์ชันในแต่ละพจน์ของผลเฉลยเติมเต็ม y_c กำหนดรูปแบบได้ดังตารางต่อไปนี้

$g(x)$	รูปแบบ y_p
(1) ค่าคงตัว k	A
(2) $\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$	$A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0$
(3) $\sin \omega x$ หรือ $\cos \omega x$	$A \sin \omega x + B \cos \omega x$
(4) $e^{\beta x}$	$Ae^{\beta x}$
(5) $e^{\beta x}(\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0)$	$e^{\beta x}(A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0)$
(6) $e^{\beta x} \sin \omega x$ หรือ $e^{\beta x} \cos \omega x$	$Ae^{\beta x} \sin \omega x + Be^{\beta x} \cos \omega x$
(7) $(\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0) \sin \omega x$	$A(\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0) \sin \omega x$
หรือ $(\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0) \cos \omega x$	$+B(\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0) \cos \omega x$
(8) $xe^{\beta x} \sin \omega x$ หรือ $xe^{\beta x} \cos \omega x$	$(Ax + B)e^{\beta x} \sin \omega x + (Ax + B)e^{\beta x} \cos \omega x$

Table 1: รูปแบบฟังก์ชัน y_p สำหรับฟังก์ชัน $g(x)$ ที่พบบ่อย

ตัวอย่าง 5. จงหาพิจารณารูปแบบฟังก์ชัน y_p ของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y'' - 8y' + 25y = 5x^3e^{-x} - 7e^{-x}$$

ตัวอย่าง 6. จงหาพิจารณารูปแบบฟังก์ชัน y_p ของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y'' + 4y = x\cos x$$

ตัวอย่าง 7. จงหาพิจารณารูปแบบฟังก์ชัน y_p ของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y'' - 9y' + 14y = 3x^2 - 5\sin 2x + 7xe^{6x}$$

กรณี 2: ฟังก์ชัน $g(x)$ ซ้ำกับผลเฉลยเติมเต็ม y_c

กำหนดให้

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_m(x)$$

เป็นผลรวมของฟังก์ชันที่สอดคล้องกับข้อตกลงเบื้องต้นถ้ามีบางฟังก์ชัน $g_i(x)$ ที่ซ้ำกับฟังก์ชันบางพจน์ในผลเฉลยเติมเต็ม y_c แล้ว ให้คูณพจน์ y_{p_i} ที่สอดคล้องกับ $g_i(x)$ นั้นด้วย x^n โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $x^n y_{p_i}$ ไม่ซ้ำกับพจน์ใน y_c ดังเช่นตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 8. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์อันดับสอง

$$y'' - 2y' + y = e^x$$

ตัวอย่าง 9. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์อันดับสอง

$$y'' - 6y' + 9y = 6x^2 + 2 - 12e^{3x}$$

ตัวอย่าง 10. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์อันดับสาม

$$y''' + y'' = e^x \cos x$$

แบบฝึกหัด

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นไม่เอกพันธ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

แบบฝึกหัด 1. $y'' - 9y = 54$

แบบฝึกหัด 2. $2y'' - 7y' + 5y = -29$

แบบฝึกหัด 3. $y'' + y' = 3$

แบบฝึกหัด 4. $y''' + 2y'' + y' = 10$

แบบฝึกหัด 5. $y'' + 4y' + 4y = 2x + 6$

แบบฝึกหัด 6. $y'' + 3y' = 4x - 5$

แบบฝึกหัด 7. $y''' + y'' = 8x^2$

แบบฝึกหัด 8. $y'' - 2y' + y = x^3 + 4x$

แบบฝึกหัด 9. $y'' - y' - 12y = e^{4x}$

แบบฝึกหัด 10. $y'' + 2y' + 2y = 5e^{6x}$

แบบฝึกหัด 11. $y'' - 2y' - 3y = 4e^x - 9$

แบบฝึกหัด 12. $y'' + 6y' + 8y = 3e^{-2x} + 2x$

แบบฝึกหัด 13. $y'' + 25y = 6\sin x$

แบบฝึกหัด 14. $y'' + 4y = 4\cos x + 3\sin x - 8$

แบบฝึกหัด 15. $y'' + 6y' + 9y = -xe^{4x}$

แบบฝึกหัด 16. $y'' + 3y' - 10y = x(e^x + 1)$

แบบฝึกหัด 17. $y^{(4)} - 2y''' + y'' = e^x + 1$

แบบฝึกหัด 18. $16y^{(4)} - y = e^{x/2}$

แบบฝึกหัด 19. $y''' - y'' + y' - y = xe^x - e^{-x} + 7$

แบบฝึกหัด 20. $y'' - y' = e^x(1 - e^{-x})^2$