SC 402 301 Differential Equations ปีการศึกษา 2/2565

4.4 สมการเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

4.4.2 การหาผลเฉลยโดยวิธีแปรผันตัวแปร

กลุ่ม 01 และ 02 บทที่ 4 สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสูง

ในหัวข้อ 4.4.1 เราศึกษาการหาผลเฉลยของสมการไม่เอกพันธุ์ในกรณีที่สัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวโดยใช้การเทียบสัมประสิทธิ์ตามหลักการทับซ้อนมาแล้ว ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวที่มีความทั่วไปมากขึ้นกว่าการเทียบสัมประสิทธิ์ โดยจะเรียกวิธีการดังกล่าวนี้ว่า **การแปรผันตัวแปร** (variation of parameters) ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

พิจารณาสมการไม่เอกพันธุ์อันดับสอง

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \tag{1}$$

และกำหนดให้ $\{y_1(x), y_2(x)\}$ เป็นเซตผลเฉลยหลักมูลของสมการเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์ (1) เราทราบแล้วว่าผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์นี้จะอยู่ในรูป

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \tag{2}$$

โดยที่ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (1) เราจะทำการแปรผันตัวแปรโดยการแทนที่ค่าคงตัว c_1 และ c_2 ใน (2) ด้วยฟังก์ชันของตัวแปร x กล่าวคือ จะทำการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ (1) ในรูป

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \tag{3}$$

เนื่องจากเราต้องการให้ y_p ในสมการ (3) เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (1) จึงพิจารณา y_p' และ y_p'' ดังนี้

$$y_p' = u_1y_p' + y_1u_1' + u_2y_2' + y_2u_2'$$

และ

$$y_p'' = u_1y_p'' + y_1'u_1' + y_1u_1'' + u_1'y_1' + u_2y_2'' + y_2'u_2' + y_2u_2'' + u_2'y_2'$$

เมื่อแทนค่า y_p' และ y_p'' ใน (1) จะได้

$$\begin{aligned}
g(x) &= ay_p'' + by_p' + cy_p \\
&= a[u_1y_p'' + y_1'u_1' + y_1u_1'' + u_1'y_1' + u_2y_2'' + y_2'u_2' + y_2u_2'' + u_2'y_2'] \\
&\quad +b[u_1y_p' + y_1u_1' + u_2y_2' + y_2u_2'] + c[u_1y_1 + u_2y_2] \\
&= u_1[ay_1'' + by_1' + cy_1] + u_2[ay_2'' + by_2' + cy_2] \\
&\quad +a[y_1u_1'' + u_1'y_1'] + a[y_2u_2'' + u_2'y_2'] \\
&\quad +a[y_1'u_1' + y_2'u_2'] + b[y_1u_1' + y_2u_2'] \\
&= +a[y_1u_1'' + u_1'y_1'] + a[y_2u_2'' + u_2'y_2'] \\
&\quad +a[y_1'u_1' + y_2'u_2'] + b[y_1u_1' + y_2u_2'] \\
&= a\frac{d}{dx}[y_1u_1'] + a\frac{d}{dx}[y_2u_2'] + a[y_1'u_1' + y_2'u_2'] + b[y_1u_1' + y_2u_2'] \\
&= a\frac{d}{dx}[y_1u_1' + y_2u_2'] + a[y_1'u_1' + y_2'u_2'] + b[y_1u_1' + y_2u_2'] \qquad (4)
\end{aligned}$$

เนื่องจากจุดมุ่งหมาย คือการหาฟังก์ชัน $u_1(x)$ และ $u_2(x)$ เราจึงจะพิจารณาระบบสมการสองตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับ u_1 และ u_2 นี้

สมมติให้

$$y_1u_1' + y_2u_2' = 0 \qquad (5)$$

ซึ่งทำให้สมการ (4) กลายเป็น

$$\frac{d}{dx}[y_1u_1' + y_2u_2'] = \frac{g(x)}{a} \qquad (6)$$

นั่นคือ จะได้ระบบสมการสองตัวแปร

$$\begin{aligned}
y_1u_1' + y_2u_2' &= 0 \\
y_1'u_1' + y_2'u_2' &= \frac{g(x)}{a}
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น โดยกฎของคาร์เมอร์ (Cramer's Rule) จะได้ผลเฉลยของระบบสมการคือ

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \frac{g(x)}{a} & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{-y_2 g(x)}{aW(y_1,y_2)} \tag{7}$$

และ

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \frac{g(x)}{a} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{y_1 g(x)}{aW(y_1,y_2)} \tag{8}$$

ซึ่งส่งผลให้สามารถหาฟังก์ชัน u_1 และ u_2 ได้โดยการหาปริพันธ์ u_1' และ u_2' ใน (7) และ (8) ตามลำดับนั่นเอง ทั้งนี้ เนื่องจาก $\{y_1, y_2\}$ เป็นเซตผลเฉลยหลักมูล จึงได้ว่า $W(y_1,y_2) \neq 0$ สำหรับทุก x บนช่วง I ที่พิจารณาเสมอ

เพราะฉะนั้น เราจึงสรุปการหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวโดยการแปรผันตัวแปรได้ดังนี้

วิธีการหาผลเฉลยทั่วไปโดยการแปรผันตัวแปร

พิจารณาสมการไม่เอกพันธุ์

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = g(x)$$

โดยที่ $a(x), b(x), c(x)$ และ $g(x)$ เป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้น

1. หาผลเฉลยเติมเต็ม $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$
2. หาผลเฉลยเฉพาะ y_p ดังนี้

    (2.1) กำหนดให้ $y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$

    (2.2) คำนวณ

$$u_1' = \frac{-y_2g(x)}{aW(y_1, y_2)}$$

    และ

$$u_2' = \frac{y_1g(x)}{aW(y_1, y_2)}$$

    (2.3) หาปริพันธ์ u_1' และ u_2' เทียบ x จะได้ u_1 และ u_2

3. ผลเฉลยทั่วไป คือ

$$y = y_c + y_p$$

ตัวอย่าง 1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์อันดับสอง

$$y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{2x}$$

สังเกตว่า ในการหาปริพันธ์ของ u_1' และ u_2' เราไม่จำเป็นต้องเขียนค่าคงตัวจากการหาปริพันธ์ก็ได้

ตัวอย่าง 2. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์อันดับสอง

$$4y'' + 36y = \csc 3x$$

แบบฝึกหัด

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ต่อไปนี้บนช่วงที่ผลเฉลยทั่วไปนั้น ๆ นิยาม

แบบฝึกหัด 1. $y'' + y = \sec x$

แบบฝึกหัด 2. $y'' + y = \sin x$

แบบฝึกหัด 3. $y'' + y = \tan x$

แบบฝึกหัด 4. $y'' + y' = \sec x \tan x$

แบบฝึกหัด 5. $y'' + y = \cos^2 x$

แบบฝึกหัด 6. $y'' + y = \sec^2 x$

แบบฝึกหัด 7. $y'' - 4y = e^{2x}/x$

แบบฝึกหัด 8. $y'' - 9y = 9x/e^{3x}$

แบบฝึกหัด 9. $y'' + 3y' + 2y = 1/(1+e^x)$

แบบฝึกหัด 10. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}/(1+e^x)$

แบบฝึกหัด 11. $y'' + 3y' + 2y = \sin(e^x)$

แบบฝึกหัด 12. $y'' - 2y' + y = e^x \arctan x$

แบบฝึกหัด 13. $y'' - 2y' + y = e^x/(1+x^2)$

แบบฝึกหัด 14. $y'' - 2y' + 2y = e^x \sec x$

แบบฝึกหัด 15. $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$

แบบฝึกหัด 16. $y'' + 10y' + 25y = e^{-10x}/x^2$