SC 402 301 Differential Equations ปีการศึกษา 2/2565

6.1 ผลการแปลงลาปลาซ

กลุ่ม 01 และ 02 บทที่ 6 ผลการแปลงลาปลาซ

ในวิชาแคลคูลัส เราทราบว่าอนุพันธ์และปริพันธ์เป็นผลการแปลง (transform) อย่างหนึ่ง กล่าวคือ การดำเนินการทั้งสองอย่างนี้จะแปลงฟังก์ชันที่พิจารณาให้เป็นฟังก์ชันอื่น ๆ ตัวอย่างเช่น หากมีฟังก์ชัน $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ที่นิยามโดย $f(t)=t^2$ สำหรับทุก $t\in\mathbb{R}$ เราจะพบว่า การหาอนุพันธ์คือการแปลงจากพหุนามกำลังสองไปเป็นสมการเชิงเส้น

$$\frac{d}{dt}t^2=2t$$

และการหาปริพันธ์คือการแปลงจากพหุนามกำลังสองเป็นวงศ์ของพหุนามกำลังสาม

$$\int t^2dt=\frac{t^3}{3}+C$$

นอกจากนี้เรายังทราบว่าผลการแปลงทั้งสองนี้มี**สมบัติเชิงเส้น** กล่าวคือ ผลการแปลงของผลรวมเชิงเส้นของสองฟังก์ชันเท่ากับผลรวมเชิงเส้นของผลการแปลงแต่ละฟังก์ชันดังกล่าว นั่นคือ กำหนดให้ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ และ $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน และ a และ b เป็นค่าคงตัว ถ้าอนุพันธ์และปริพันธ์ของ f และ g หาค่าได้ แล้ว

$$\frac{d}{dt}\left[af(t)+bg(t)\right]=a\frac{d}{dt}f(t)+b\frac{d}{dt}g(t)$$

และ

$$\int\left[af(t)+bg(t)\right]dt=a\int f(t)dt+b\int g(t)dt$$

ในบทนี้เราจะศึกษาผลการแปลงเชิงปริพันธ์ที่เรียกว่า **ผลการแปลงลาปลาซ**[1] ทั้งนี้

[1]การแปลงลาปลาซ เรียกเพื่อเป็นเกียรติกับ ปิแยร์ ซีมง ลาปลาซ (Pierre-Simon Laplace) (ค.ศ. 1749 -1827) นักคณิตศาสตร์ นักสถิติ นักฟิสิกส์ นักดาราศาสตร์ ผู้โด่งดังชาวฝรั่งเศส เมื่อปี ค.ศ.1812 ลาปลาซใช้การแปลงทำนองเดียวกันนี้ในงานวิจัยทางด้านความน่าจะเป็น อย่างไรก็ตามในความจริงแล้วผลการแปลงลาปลาซที่เราคุ้นเคยถูกพัฒนาโดย กุสตาฟ เดิตส์ช (Gustav Doetsch) นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน โดยเดิตส์ชได้พัฒนาผลการแปลงนี้จากงานของ โอลิเวอร์ เฮฟวิไซด์ (Oliver Heaviside) นักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษ ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เมื่อปี ค.ศ.1937

เนื่องจากการแปลงลาปลาซนี้มีสมบัติเชิงเส้น การแปลงนี้จึงมีประโยชน์อย่างมากในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นเชิงเส้นซึ่งเราจะศึกษาต่อไป

พิจารณาการหาปริพันธ์ต่อไปนี้ ให้ $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร จะพบว่าการหาปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชัน f เทียบกับตัวแปรหนึ่งจะได้ฟังก์ชันของอีกตัวแปรหนึ่ง ตัวอย่างเช่น กำหนดให้ s เป็นค่าคงตัว จะได้ว่า

$$\int_0^2 s\,dt = 2s$$

ในทำนองเดียวกัน การหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต $\int K(s,t)f(t)dt$ คือการแปลงฟังก์ชัน f ซึ่งขึ้นอยู่กับตัวแปร t ไปเป็นฟังก์ชัน F ซึ่งขึ้นอยู่กับตัวแปร s แทน ดังนั้น ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบน $[0,+\infty)$ จะได้ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_0^{+\infty} K(s,t)f(t)dt$ คือ

$$\int_0^{+\infty} K(s,t)f(t)dt := \lim_{N\to+\infty}\int_0^N K(s,t)f(t)dt$$

และเราเรียกฟังก์ชัน $K(s,t)$ ของตัวแปร t และ s ในที่นี้ว่า **เคอร์เนล** (kernel) ของการแปลง ซึ่งการเลือกเคอร์เนลที่แตกต่างกันจะทำให้ได้การแปลงที่เฉพาะแบบต่างกัน สังเกตว่าปริพันธ์นี้จะหาค่าได้หรือไม่นั้นขึ้นอยู่กับตัวแปร s นั่นเอง จากข้อสังเกตนี้ เราสามารถนิยามผลการแปลงลาปลาซได้ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 1. (ผลการแปลงลาปลาซ)
ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบน $[0,+\infty)$ เราเรียกฟังก์ชัน F ของตัวแปร s ที่นิยามโดย

$$F(s) := \int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt \tag{1}$$

สำหรับทุก $s\in\{r\in\mathbb{R}:$ ปริพันธ์ (1) หาค่าได้ที่จุด $r\}$ ว่า **ผลการแปลงลาปลาซ** (Laplace transform) ของฟังก์ชัน f และเขียนแทน $F(s)$ ด้วย $\mathscr{L}\{f(t)\}(s)$ หรือ $\mathscr{L}\{f\}(s)$

ตัวอย่าง 1. จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันค่าคงตัวที่นิยามโดย $f(t) = 1$ สำหรับทุก $t \in [0, +\infty)$

ตัวอย่าง 2. กำหนดให้ a เป็นค่าคงตัว จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t) = t$ สำหรับทุก $t \in [0, +\infty)$

ตัวอย่าง 3. กำหนดให้ a เป็นค่าคงตัว จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t) = e^{at}$ สำหรับทุก $t \in [0, +\infty)$

ตัวอย่าง 4. ให้ b เป็นค่าคงตัว จงหาค่าของ $\mathscr{L}\{\sin bt\}$

ตัวอย่าง 5. จงหาค่าของ $\mathscr{L}\{f\}$ เมื่อ

$$f(t) := \begin{cases} 2, & 0 < t < 5 \\ 0, & 5 < t < 10 \\ e^{4t}, & 10 < t \end{cases}$$

ผลการแปลงลาปลาซมีสมบัติที่น่าสนใจคือความเป็นเชิงเส้นดังที่ได้กล่าวนำมาแล้วข้างต้น ซึ่งมีรายละเอียดดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1. (สมบัติเชิงเส้นของผลการแปลงลาปลาซ)
ให้ f *และ* g *เป็นฟังก์ชันที่สำหรับทุก* $s > \alpha$ *ผลการแปลงลาปลาซหาค่าได้ และ ให้* c *เป็นค่าคงตัว จะได้ว่า สำหรับทุก* $s > \alpha$

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{f+g\} &= \mathscr{L}\{f\}+\mathscr{L}\{g\} \\ \mathscr{L}\{cf\} &= c\mathscr{L}\{f\} \end{aligned}$$

ทฤษฎีบทข้างต้นนี้มีประโยชน์อย่างมากในการคำนวณผลการแปลงลาปลาซ ดังเช่นตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6. จงหาค่าของ $\mathscr{L}\{8+2e^{3t}-5\sin 2t\}$

สังเกตว่าผลการแปลงลาปลาซจะหาค่าได้หรือไม่นั้นขึ้นอยู่กับค่าของ s และฟังก์ชัน $f(t)$ ในปริพันธ์ (1) กล่าวคือ สำหรับทุก $s > 0$ จะพบว่า ถ้า t มีค่าเพิ่มเข้าสู่อนันต์ แล้วค่าของ e^{-st} จะเข้าสู่ศูนย์อย่างรวดเร็ว ซึ่งมักจะส่งผลให้ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันมีค่า อย่างไรก็ตาม มีหลายฟังก์ชันที่ไม่สามารถหาผลการแปลงลาปลาซได้ ดังนั้น ต่อไปนี้เราจึงศึกษาสมบัติที่ทำให้ผลการแปลงลาปลาซมีค่า

บทนิยาม 2. (ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องแบบกระโดด)
ให้ $f(t)$ ฟังก์ชันที่นิยามบน $[a,b]$ เราจะเรียก f ว่า **ไม่ต่อเนื่องแบบกระโดด** (jump discontinuous) ที่ $t_0 \in (a,b)$ ถ้า f ไม่ต่อเนื่องที่ t_0 แต่ลิมิตทางเดียว

$$\lim_{t \to t_0^-} f(t) \text{ และ } \lim_{t \to t_0^+} f(t)$$

หาค่าได้ และเราจะเรียก f ซึ่งไม่ต่อเนื่องที่จุดปลาย $t_0 = a$ (หรือ b) ว่า **ไม่ต่อเนื่องแบบกระโดดที่จุดปลาย** ถ้า ลิมิตทางเดียว $\lim_{t \to a^+} f(t)$ (หรือ $\lim_{t \to b^-} f(t)$) หาค่าได้

จากบทนิยามฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องแบบประโดด ณ จุดหนึ่ง ๆ เราสามารถนิยามฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วงได้ดังนี้

บทนิยาม 3. (ฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง)
ให้ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบน $[a,b]$ เราจะเรียก f ว่า **ต่อเนื่องเป็นช่วง** (piecewise continuous) **บนช่วง** $[a,b]$ ถ้า มีจุด $t_0 \in [a,b]$ จำนวนจำกัดตัว ที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องแบบกระโดดที่จุด t_0 ดังกล่าว และเราจะเรียกฟังก์ชัน $f(t)$ ที่นิยามบน $[0,+\infty)$ ว่า **ต่อเนื่องเป็นช่วงบนช่วง** $[0,+\infty)$ ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วงบน $[0,N]$ สำหรับทุกจำนวนจริง $N > 0$

ตัวอย่าง 7. จงตรวจสอบว่าว่าฟังก์ชัน $f(t)$ ที่นิยามบนช่วง $[0,3]$ โดย

$$f(t) := \begin{cases} t, & 0 < t < 1 \\ 3, & 1 < t < 2 \\ (t-2)^2, & 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วงบนช่วง $[0,3]$ หรือไม่

ตัวอย่าง 8. จงแสดงว่าฟังก์ชัน $f(t) = \frac{1}{t}$ ที่นิยามบนช่วงใด ๆ ที่มีจุดกำเนิดเป็นสมาชิกไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วงบนช่วงดังกล่าว

สังเกตว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบช่วงบนช่วง $[0,N]$ สำหรับทุกจำนวนจริง N แล้วเราสามารถหาค่าปริพันธ์

$$\int_0^N e^{-st} f(t)dt$$

ได้แน่นอน อย่างไรก็ตาม ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^N e^{-st} f(t)dt$$

อาจจะไม่มีค่าก็ได้ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับค่าของ $e^{-st}f(t)$ เมื่อ t มีค่ามาก ๆ

ต่อไปเราจะกล่าวถึงสมบัติบางอย่างของ f ซึ่งจะช่วยในการยืนยันการมีอยู่จริงของผลการแปลงลาปลาซ

บทนิยาม 4. (อันดับเลขชี้กำลัง)
ให้ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบน $[0,+\infty)$ เราจะเรียก f ว่ามี **อันดับเลขชี้กำลัง** (exponential order) เป็น $\alpha(\geq 0)$ ถ้า มีค่าคงตัว M และ T ซึ่งมีค่าเป็นบวก ที่ทำให้

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t} \text{ สำหรับทุก } t > T$$

ตัวอย่าง 9. จงแสดงว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

1. ฟังก์ชันที่มีขอบเขตมีอันดับเลขชี้กำลังเป็น 0

2. ฟังก์ชัน $f(t) = \cos t$ เป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเลขชี้กำลังเป็น α สำหรับทุก $\alpha \geq 0$

3. ฟังก์ชัน $f(t) = e^{5t} \sin 2t$ เป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเลขชี้กำลังเป็น 5

4. ฟังก์ชัน $f(t) = e^{t^2}$ ไม่เป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเลขชี้กำลัง

5. ฟังก์ชัน $f(t) = 1/t$ ไม่เป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเลขชี้กำลัง

จากความรู้ในบทก่อนหน้า ฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องกับการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว เช่น ฟังก์ชันพหุนาม ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง ฟังก์ชันไซน์ และฟังก์ชันโคไซน์ เป็นต้น จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบช่วงและมีอันดับเลขชี้กำลัง ในลำดับต่อไปนี้ เราจะแสดงว่าผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันดังกล่าวนี้หาค่าได้ สำหรับทุก s ที่มีค่ามากพอ

ทฤษฎีบท 2. (การมีอยู่จริงของผลการแปลงลาปลาซ)
กำหนดให้ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบน $[0,+\infty)$ ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบช่วงบน $[0,+\infty)$ และมีอันดับเลขชี้กำลังเป็น α แล้ว สำหรับทุกจำนวนจริง s ที่ $s>\alpha$ จะได้ว่า ผลการแปลงลาปลาซ $\mathscr{L}\{f\}(s)$ หาค่าได้

ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันพื้นฐานสามารถสรุปได้ดังนี้

$f(t)$	$\mathscr{L}\{f\}(s)$	ช่วงของ s
1	$\frac{1}{s}$	$(0,+\infty)$
$t^n, n\in\mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$(0,+\infty)$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$(a,+\infty)$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2+b^2}$	$(0,+\infty)$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2+b^2}$	$(0,+\infty)$
$\sinh bt$	$\frac{b}{s^2-b^2}$	$(0,+\infty)$
$\cosh bt$	$\frac{s}{s^2-b^2}$	$(0,+\infty)$

ตาราง 1 ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันพื้นฐาน (Verify?)

แบบฝึกหัด

จงใช้บทนิยาม 1 หาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันต่อไปนี้

แบบฝึกหัด 1. $f(t)=\begin{cases} -1, & 0\le t<1 \\ 1, & t\ge 1 \end{cases}$

แบบฝึกหัด 2. $f(t)=\begin{cases} 4, & 0\le t<2 \\ 0, & t\ge 2 \end{cases}$

แบบฝึกหัด 3. $f(t)=\begin{cases} t, & 0\le t<1 \\ 1, & t\ge 1 \end{cases}$

แบบฝึกหัด 4. $f(t)=\begin{cases} 2t+1, & 0\le t<1 \\ 0, & t\ge 1 \end{cases}$

แบบฝึกหัด 5. $f(t)=\begin{cases} \sin t, & 0\le t<\pi \\ 0, & t\ge \pi \end{cases}$

แบบฝึกหัด 6. $f(t)=\begin{cases} 0, & 0\le t<\pi/2 \\ \cos t, & t\ge \pi/2 \end{cases}$

แบบฝึกหัด 7. $f(t)=e^{t+7}$

แบบฝึกหัด 8. $f(t)=e^{-2t-5}$

แบบฝึกหัด 9. $f(t)=te^{4t}$

แบบฝึกหัด 10. m $f(t)=t^2e^{-2t}$

แบบฝึกหัด 11. $f(t)=e^{-t}\sin t$

แบบฝึกหัด 12. $f(t)=e^{t}\cos t$

แบบฝึกหัด 13. $f(t)=t\cos t$

แบบฝึกหัด 14. $f(t) = t\sin t$

จงใช้ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันพื้นฐานในตาราง 1 หาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันต่อไปนี้

แบบฝึกหัด 15. $f(t) = 2t^4$

แบบฝึกหัด 16. $f(t) = t^5$

แบบฝึกหัด 17. $f(t) = 4t - 10$

แบบฝึกหัด 18. $f(t) = 7t + 3$

แบบฝึกหัด 19. $f(t) = t^2 + 6t - 3$

แบบฝึกหัด 20. $f(t) = -4t^2 + 16t + 9$

แบบฝึกหัด 21. $f(t) = (t+1)^3$

แบบฝึกหัด 22. $f(t) = (2t-1)^3$

แบบฝึกหัด 23. $f(t) = 1 + e^{4t}$

แบบฝึกหัด 24. $f(t) = t^2 - e^{-9t+5}$

แบบฝึกหัด 25. $f(t) = (1 + e^{2t})^2$

แบบฝึกหัด 26. $f(t) = (e^t - e^{-t})^2$

แบบฝึกหัด 27. $f(t) = 4t^2 - 5\sin 3t$

แบบฝึกหัด 28. $f(t) = \cos 5t + \sin 2t$

แบบฝึกหัด 29. $f(t) = \sinh kt$

แบบฝึกหัด 30. $f(t) = \cosh kt$

แบบฝึกหัด 31. $f(t) = e^t \sinh t$

แบบฝึกหัด 32. $f(t) = e^{-t}\cosh t$

จงใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันต่อไปนี้

แบบฝึกหัด 33. $f(t) = \sin 2t \cos 2t$

แบบฝึกหัด 34. $f(t) = \cos^2 t$

แบบฝึกหัด 35. $f(t) = \sin(4t+5)$

แบบฝึกหัด 36. $f(t) = 10\cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$

พิจารณาฟังก์ชันแกมม่าที่นิยามโดยปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

สำหรับทุก $\alpha > 0$

แบบฝึกหัด 37. จงแสดงว่า $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$

แบบฝึกหัด 38. จงแสดงว่า สำหรับทุก $\alpha > -1$

$$\mathscr{L}\{t^{\alpha}\} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$$

จงใช้ความจริงที่ว่า $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ และผลจากแบบฝึกหัด 37 - 38 หาผลการแปลงลาปลาซต่อไปนี้

แบบฝึกหัด 39. $f(t) = t^{-1/2}$

แบบฝึกหัด 40. $f(t) = t^{1/2}$