

6.2 ผลการแปลงลาปลาซผกผัน

กลุ่ม 01 และ 02

บทที่ 6 ผลการแปลงลาปลาซ

เราทราบว่า การแปลงลาปลาซคือการแปลงฟังก์ชัน $f(t)$ ให้อยู่ในรูปของฟังก์ชัน $F(s)$ ซึ่งเราเขียนได้เป็น $\mathcal{L}\{f\} = F(s)$ ในหัวข้อนี้ จะพิจารณาในทางกลับกัน กล่าวคือ ถ้ามีฟังก์ชัน $F(s)$ เราจะหาฟังก์ชัน $f(t)$ ที่ถูกแปลงลาปลาซแล้วได้เป็นฟังก์ชัน $F(s)$ ที่กำหนดให้ได้อย่างไร ซึ่งต่อไปจะเรียกกระบวนการหาฟังก์ชัน f นี้ว่า การแปลงลาปลาซผกผัน ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1. (ผลการแปลงลาปลาซผกผัน)

ให้ $F(s)$ เป็นฟังก์ชัน ถ้ามีฟังก์ชัน $f(t)$ ที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[0, +\infty)$ และสอดคล้องกับ

$$\mathcal{L}\{f\} = F$$

แล้วเราเรียกฟังก์ชัน f นี้ว่า **ผลการแปลงลาปลาซผกผัน** (inverse Laplace transform) ของฟังก์ชัน $F(s)$ และเขียนแทน f ด้วย $\mathcal{L}^{-1}$

ตัวอย่าง 1. จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผันของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $F(s) = \frac{2}{s^3}$

2. $F(s) = \frac{3}{s^2+9}$

3. $F(s) = \frac{s}{s^2-4}$

แน่นอนว่า จากตาราง 1 ในหัวข้อ 6.1 เราจะได้ผลการแปลงลาปลาซผกผันของฟังก์ชันพื้นฐานดังนี้

$F(s)$	$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{n!}{s^{n+1}}, n \in \mathbb{N}$	t^n
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{b}{s^2+b^2}$	$\sin bt$
$\frac{s}{s^2+b^2}$	$\cos bt$
$\frac{b}{s^2-b^2}$	$\sinh bt$
$\frac{s}{s^2-b^2}$	$\cosh bt$

ตาราง 2 ผลการแปลงลาปลาซผกผันของฟังก์ชันพื้นฐาน (Verify?)

สังเกตว่าผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันพื้นฐานในตาราง 2 เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[0, +\infty)$ ทั้งหมด นอกจากนี้ ในทำนองเดียวกันกับผลการแปลงลาปลาซ เราจะได้ว่าผลการแปลงลาปลาซผกผันสอดคล้องสมบัติเชิงเส้นเช่นกัน ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1. (สมบัติเชิงเส้นของผลการแปลงผกผัน)

สมมติให้ผลการแปลงลาปลาซผกผัน $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$ และ $\mathcal{L}^{-1}\{G\}$ ของฟังก์ชัน F และ G หาค่าได้ และต่อเนื่องบนช่วง $[0, +\infty)$ และให้ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ จะได้ว่า

$$\mathcal{L}^{-1}\{F + G\} = \mathcal{L}^{-1}\{F\} + \mathcal{L}^{-1}\{G\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{cF\} = c\mathcal{L}^{-1}\{F\}$$

ตัวอย่าง 2. จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผัน $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3s+5}{s^2+7} \right\}$

ในบางครั้งเราจำเป็นต้องทำการแยกเศษส่วนย่อย (partial fraction) ของฟังก์ชันที่พิจารณาก่อนหาผลการแปลงลาปลาซผกผันดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3. จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผัน $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)} \right\}$

ตัวอย่าง 4. จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผัน $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+1}{s^2(s+2)^2} \right\}$

ตัวอย่าง 5. จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผัน $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3s-2}{s^3(s^2+4)} \right\}$

แบบฝึกหัด

จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผันของฟังก์ชันต่อไปนี้

แบบฝึกหัด 1. $F(s) = \frac{1}{s^3}$

แบบฝึกหัด 2. $F(s) = \frac{1}{s^4}$

แบบฝึกหัด 3. $F(s) = \frac{(s+1)^3}{s^4}$

แบบฝึกหัด 4. $F(s) = \frac{(s+2)^2}{s^3}$

แบบฝึกหัด 5. $F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s-2}$

แบบฝึกหัด 6. $F(s) = \frac{1}{4s+1}$

แบบฝึกหัด 7. $F(s) = \frac{4s}{4s^2+1}$

แบบฝึกหัด 8. $F(s) = \frac{1}{s^2-16}$

แบบฝึกหัด 9. $F(s) = \frac{10s}{s^2-25}$

แบบฝึกหัด 10. $F(s) = \frac{2s-6}{s^2+9}$

แบบฝึกหัด 11. $F(s) = \frac{1}{s^2+3s}$

แบบฝึกหัด 12. $F(s) = \frac{s+1}{s^2-4s}$

แบบฝึกหัด 13. $F(s) = \frac{s}{s^2+2s-3}$

แบบฝึกหัด 14. $F(s) = \frac{2s+4}{(s-2)(s^2+4s+3)}$

แบบฝึกหัด 15. $F(s) = \frac{s+1}{(s^2-4s)(s+5)}$

แบบฝึกหัด 16. $F(s) = \frac{1}{s^2(s^2+4)}$

แบบฝึกหัด 17. $F(s) = \frac{s}{(s^2+4)(s+2)}$

แบบฝึกหัด 18. $F(s) = \frac{1}{s^4-9}$