SC 402 301 Differential Equations ปีการศึกษา 2/2565

6.3 สมบัติของผลการแปลงลาปลาซ

กลุ่ม 01 และ 02 บทที่ 6 ผลการแปลงลาปลาซ

เนื่องจากการหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t)$ ใด ๆ นั้น เกี่ยวข้องกับการคำนวณปริพันธ์ไม่ตรงแบบตามนิยาม

$$\mathscr{L}\{f\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$$

ซึ่งในบางครั้ง การหาปริพันธ์ดังกล่าวนี้เป็นเรื่องยาก อย่างไรก็ตาม เราได้เห็นแล้วว่าสมบัติเชิงเส้นของผลการแปลงช่วยให้การหาผลการแปลงลาปลาซสะดวกขึ้น ในส่วนต่อไปนี้นี้เราจะพิจารณาสมบัติเพิ่มเติมที่จะช่วยให้การหาผลการแปลงลาปลาซสะดวกยิ่งขึ้น ทั้งนี้สมบัติเหล่านี้จะช่วยให้การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ และปัญหาค่าเริ่มต้นที่เราจะศึกษาในลำดับถัดไปอีกด้วย

ทฤษฎีบท 1. (ทฤษฎีบทการเลื่อนขนาน)
ถ้าผลการแปลงลาปลาซ $\mathscr{L}\{f\}(s) = F(s)$ หาค่าได้ สำหรับทุก $s > \alpha$ แล้ว

$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = F(s-a)$$

สำหรับทุก $s > \alpha + a$

สังเกตว่า ถ้าเราทราบผลการแปลงลาปลาซ $\mathscr{L}\{f\}(s) = F(s)$ แล้ว ทฤษฎีบท 1 สามารถช่วยในการหาผลการแปลงลาปลาซ $\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\}(s)$ สะดวกขึ้นโดยการเลื่อนขนานจาก $F(s)$ ไปเป็น $F(s-a)$ กล่าวคือ พิจารณาค่าคงตัว s ใด ๆ จะพบว่า กราฟของ $F(s-a)$ คือ กราฟที่เกิดจากการเลื่อนขนานกราฟของ $F(s)$ บนแกนของ s ด้วยระยะทาง $|a|$ นั่นคือ ถ้า $a > 0$ กราฟของ $F(s)$ จะถูกเลื่อนไปทางขวาเป็นระยะทาง a หน่วย ในทำนองเดียวกัน ถ้า $a < 0$ กราฟของ $F(s)$ จะถูกเลื่อนไปทางซ้ายเป็นระยะทาง $|a|$ หน่วยเช่นกัน

เพื่อให้การคำนวณสะดวกขึ้น จะใช้สัญลักษณ์แทนผลการแปลงลาปลาซ

$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} =: \mathscr{L}\{f(t)\}_{s\to s-a}$$

ตัวอย่าง 1. จงใช้ทฤษฎีบทการเลื่อนขนาน (ทฤษฎีบท 1) หาผลการแปลงลาปลาซต่อไปนี้

1. $\mathscr{L}\{e^{5t}t^3\}$
2. $\mathscr{L}\{e^{-2t}\cos 4t\}$

จากทฤษฎีบทการเลื่อนขนาน (ทฤษฎีบท 1) เราจะได้ว่า ถ้า $f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$ แล้ว

$$\begin{aligned} e^{at}f(t) &= \mathscr{L}^{-1}\{F(s-a)\} \\ &= \mathscr{L}^{-1}\{F(s)|_{s\to s-a}\} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2. จงใช้ผลจากทฤษฎีบทการเลื่อนขนานหาผลการแปลงลาปลาซผกผัน

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+6s+11}\right\}$$

ตัวอย่าง 3. จงใช้ผลจากทฤษฎีบทการเลื่อนขนานหาผลการแปลงลาปลาซผกผัน

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^3}+\frac{1}{s^2+2s-8}\right\}$$

เนื่องจากจุดมุ่งหมายในที่นี้คือ การนำผลการแปลงลาปลาซไปใช้ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ เราจึงจำเป็นต้องศึกษาผลการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน เช่น $\mathscr{L}\{f'(t)\}$ และ $\mathscr{L}\{f''(t)\}$ เป็นต้น ซึ่งมีรายละเอียดดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2. (ผลการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์)
ให้ $f(t), f'(t), \ldots, f^{(n-1)(t)}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[0,+\infty)$ ที่มีอันดับเลขชี้กำลัง และให้ $f^{(n)}(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบช่วงบน $[0,+\infty)$ แล้ว สำหรับทุก $s > \alpha$ จะได้ว่า

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathscr{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

สังเกตว่า จากทฤษฎีบท 2 ทำให้สามารถคำนวณผลการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้ เช่น

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = s\mathscr{L}\{f(t)\} - f(0)$$

และ

$$\mathscr{L}\{f''(t)\} = s^2\mathscr{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$$

เป็นต้น

ตัวอย่าง 4. กำหนดให้ $\mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{s}$ จงใช้ทฤษฎีบทผลการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์ (ทฤษฎีบท 2) หาผลการแปลงลาปลาซ $\mathscr{L}\{t\}$

ตัวอย่าง 5. กำหนดให้ $\mathscr{L}\{\cos bt\} = \frac{s}{s^2+b^2}$ จงใช้ทฤษฎีบทผลการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์หาผลการแปลงลาปลาซ $\mathscr{L}\{\sin bt\}$

สังเกตว่า คำถามที่มักจะเกิดขึ้นเกี่ยวกับการแปลงใด ๆ คือ ถ้า $F(s)$ เป็นผลการแปลงลาปลาซของ $f(t)$ แล้ว $F'(s)$ จะเป็นผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันของตัวแปร t บางฟังก์ชันด้วยหรือไม่ ซึ่งคำตอบเป็นไปดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3. (อนุพันธ์ของผลการแปลงลาปลาซ)
ให้ $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ และสมมติให้ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบช่วงบน $[0, +\infty)$ ที่มีอันดับเลขชี้กำลัง แล้ว สำหรับทุก $s > \alpha$ จะได้ว่า

$$\mathscr{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

ตัวอย่าง 6. จงใช้ทฤษฎีบทอนุพันธ์ของผลการแปลงลาปลาซ (ทฤษฎีบท 3) หาผลการแปลงลาปลาซ

$$\mathscr{L}\left\{te^{3t}\right\}$$

ตัวอย่าง 7. จงใช้ทฤษฎีบทอนุพันธ์ของผลการแปลงลาปลาซ (ทฤษฎีบท 3) หาผลการแปลงลาปลาซ

$$\mathscr{L}\left\{t^2 \sin bt\right\}$$

ตัวอย่าง 8. จงหาผลการแปลงลาปลาซ

$$\mathscr{L}\left\{te^{-t}\cos bt\right\}$$

ตัวอย่าง 9. จงหาผลการแปลงลาปลาซ

$$\mathscr{L}\{bt\cos bt + \sin bt\}$$

แบบฝึกหัด

จงหาผลการแปลงลาปลาซหรือผลการแปลงลาปลาซผกผันในแต่ละข้อต่อไปนี้

แบบฝึกหัด 1. $\mathscr{L}\{te^{10t}\}$

แบบฝึกหัด 2. $\mathscr{L}\{te^{-6t}\}$

แบบฝึกหัด 3. $\mathscr{L}\{t^3e^{-2t}\}$

แบบฝึกหัด 4. $\mathscr{L}\{t^10e^{-7t}\}$

แบบฝึกหัด 5. $\mathscr{L}\{e^t\sin 3t\}$

แบบฝึกหัด 6. $\mathscr{L}\{e^{-2t}\cos 4t\}$

แบบฝึกหัด 7. $\mathscr{L}\{e^{5t}\sinh 3t\}$

แบบฝึกหัด 8. $\mathscr{L}\left\{\frac{\cosh t}{e^t}\right\}$

แบบฝึกหัด 9. $\mathscr{L}\{t(e^t+e^{2t})^2\}$

แบบฝึกหัด 10. $\mathscr{L}\{e^{-t}\sin^2 t\}$

แบบฝึกหัด 11. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^3}\right\}$

แบบฝึกหัด 12. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-6s+10}\right\}$

แบบฝึกหัด 13. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2+4s+5}\right\}$

แบบฝึกหัด 14. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s+5}{s^2+6s+34}\right\}$

แบบฝึกหัด 15. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)^2}\right\}$

แบบฝึกหัด 16. $\mathscr{L}\{\sin 3t\cos 3t\}$

แบบฝึกหัด 17. $\mathscr{L}\{t\sin 3t\}$

แบบฝึกหัด 18. $\mathscr{L}\{t\sin^2 t\}$

แบบฝึกหัด 19. $\mathscr{L}\{t^2\sinh t\}$

แบบฝึกหัด 20. $\mathscr{L}\{te^{-3t}\cos 3t\}$