

## 6.4 การหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้นโดยผลการแปลงลาปลาซ

กลุ่ม 01 และ 02

บทที่ 6 ผลการแปลงลาปลาซ

ในหัวข้อนี้ จะนำความรู้เรื่องผลการแปลงลาปลาซ ผลการแปลงลาปลาซผกผัน และสมบัติของผลการแปลงลาปลาซทั้งหมดข้างต้นมาใช้ในการหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว ดังแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 1.** จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y' - 3y = e^{2t}, \quad y(0) = 1$$

ในการหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นโดยการใช้ผลการแปลงลาปลาซแยกเป็นขั้นตอนได้ดังนี้

**ขั้นที่ 1.** แปลงลาปลาซทั้งสองฝั่งของสมการเชิงอนุพันธ์และจัดรูปโดยใช้สมบัติเชิงเส้นของผลการแปลง

จากสมการเชิงอนุพันธ์

$$y' - 3y = e^{2t}$$

เมื่อทำการแปลงลาปลาซทั้งสองฝั่งของสมการ จะได้

$$\mathcal{L}\{y' - 3y\} = \mathcal{L}\{e^{2t}\}$$

และจัดรูปโดยใช้สมบัติเชิงเส้นของผลการแปลง จะได้

$$\mathcal{L}\{y'\} - 3\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{e^{2t}\}$$

**ขั้นที่ 2.** กำหนดให้  $\mathcal{L}\{y\} = Y(s)$  จัดรูปสมการที่ได้ในขั้นที่ 1 ให้อยู่ในรูป  $Y(s)$  โดยใช้สมบัติผลการแปลงลาปลาซที่เกี่ยวข้องและค่าเริ่มต้นที่กำหนดให้

กำหนดให้  $\mathcal{L}\{y\} = Y(s)$  จากผลการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์และค่าเริ่มต้น  $y(0) = 1$  จะได้ว่า

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - y(0) = sY(s) - 1$$

และเราทราบว่า

$$\mathcal{L}\{e^{2t}\} = \frac{1}{s-2}$$

ดังนั้น จากสมการในขั้นที่ 1 ที่ว่า

$$\mathcal{L}\{y'\} - 3\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{e^{2t}\}$$

จึงได้ว่า

$$sY(s) - 1 - 3Y(s) = \frac{1}{s-2}$$

นั่นคือ

$$Y(s) = \frac{s-1}{(s-2)(s-3)}$$

**ขั้นที่ 3.** หาผลเฉลย  $y(t)$  โดยทำการแปลงลาปลาซผกผันฟังก์ชัน  $Y(s)$

จาก

$$Y(s) = \frac{s-1}{(s-2)(s-3)}$$

ซึ่งเขียนในรูปเศษส่วนย่อยได้เป็น

$$Y(s) = \frac{-1}{s-2} + \frac{2}{s-3}$$

(Verify?) และเมื่อทำการแปลงลาปลาซผกผันทั้งสองฝั่งของสมการ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s-2} + \frac{2}{s-3}\right\} \\ &= -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} \\ &= -e^{2t} + 2e^{3t} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น ผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นนี้ คือ  $y(t) = -e^{2t} + 2e^{3t}$

□

ตัวอย่าง 2. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y' - y = \sin t, \quad y(0) = 0$$

ตัวอย่าง 3. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y'' - 6y' + 9y = t^2 e^{3t}, \quad y(0) = 2, y'(0) = 6$$

ตัวอย่าง 4. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y'' + 9y = \cos 3t, \quad y(0) = 2, y'(0) = 5$$

## แบบฝึกหัด

จงใช้ผลการแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นต่อไปนี้

แบบฝึกหัด 1.  $y' - y = 1, \quad y(0) = 0$

แบบฝึกหัด 2.  $y' + 2y = t, \quad y(0) = -1$

แบบฝึกหัด 3.  $y' + 4y = e^{-4t}, \quad y(0) = 2$

แบบฝึกหัด 4.  $y' - y = \sin t, \quad y(0) = 0$

แบบฝึกหัด 5.  $y' - y = te^t \sin t, \quad y(0) = 0$

แบบฝึกหัด 6.  $y'' + 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$

แบบฝึกหัด 7.  $y'' - 6y' + 13y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = -3$

แบบฝึกหัด 8.  $y'' - 6y' + 9y = t, \quad y(0), y'(0) = 1$

แบบฝึกหัด 9.  $y'' - 4y' + 4y = t^3, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$

แบบฝึกหัด 10.  $y'' - 4y' + 4y = t^3 e^{2t}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$

แบบฝึกหัด 11.  $y'' - 7y' + 10y = 9 \cos t + 7 \sin t, \quad y(0) = 5, y'(0) = -4$

แบบฝึกหัด 12.  $y'' + 4y = 4t^2 - 4t + 10, \quad y(0) = 0, y'(0) = 3$