SC 402 301 Differential Equations	ปีการศึกษา 2/2565
6.5 การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นโดยผลการแปลงลาปลาซ	
กลุ่ม 01 และ 02	บทที่ 6 ผลการแปลงลาปลาซ

ในหัวข้อนี้ จะนำความรู้เรื่องผลการแปลงลาปลาซ ผลการแปลงลาปลาซผกผัน และสมบัติของผลการแปลงลาปลาซทั้งหมดข้างต้นมาใช้ในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น (system of linear differential equations) ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว ที่มีสอดคล้องกับค่าเริ่มต้นที่กำหนดให้ดังนี้

ตัวอย่าง 1. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\begin{aligned} 2x' + y' - y &= t \\ x' + y' &= t^2 \end{aligned}$$

โดยที่ $x(0) = 1$ และ $y(0) = 0$

ในการหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นที่เกี่ยวข้องกับระบบสมการเชิงเส้นโดยการใช้ผลการแปลงลาปลาซแยกเป็นขั้นตอนได้ดังนี้

ขั้นที่ 1. แปลงลาปลาซทั้งสองฝั่งของสมการเชิงอนุพันธ์และจัดรูปโดยใช้สมบัติเชิงเส้นของผลการแปลง

จากสมการเชิงอนุพันธ์ทั้งสองสมการที่กำหนดให้ เมื่อทำการแปลงลาปลาซทั้งสองฝั่งของสมการ และจัดรูปโดยใช้สมบัติเชิงเส้นของผลการแปลง จะได้

$$\mathscr{L}\{y'\} - 3\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{e^{2t}\}$$

$$\begin{aligned} 2\mathscr{L}\{x'\} + \mathscr{L}\{y'\} - \mathscr{L}\{y\} &= \mathscr{L}\{t\} \\ \mathscr{L}\{x'\} + \mathscr{L}\{y'\} &= \mathscr{L}\{t^2\} \end{aligned}$$

ขั้นที่ 2. กำหนดให้ $\mathscr{L}\{x\} = X(s)$ และ $\mathscr{L}\{y\} = Y(s)$ จัดรูปสมการที่ได้ในขั้นที่ 1 ให้อยู่ในรูป $X(s)$ และ $Y(s)$ โดยใช้สมบัติผลการแปลงลาปลาซที่เกี่ยวข้องและค่าเริ่มต้นที่กำหนดให้

กำหนดให้ $\mathscr{L}\{x\} = X(s)$ และ $\mathscr{L}\{y\} = Y(s)$ จากผลการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์และค่าเริ่มต้น $x(0) = 1$ และ $y(0) = 1$ จะได้ว่า

$$2\mathscr{L}\{x'\} + \mathscr{L}\{y'\} - \mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{t\}$$

เขียนใหม่ได้เป็น

$$2(sX(s) - x(0)) + (sY(s) - y(0)) - Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

นั่นคือ

$$2sX(s) + (s-1)Y(s) = 2 + \frac{1}{s^2}$$

และในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$\mathscr{L}\{x'\} + \mathscr{L}\{y'\} = \mathscr{L}\{t^2\}$$

เขียนใหม่ได้เป็น

$$(sX(s) - x(0)) + (sY(s) - y(0)) = \frac{2}{s^3}$$

นั่นคือ

$$sX(s) + sY(s) = 1 + \frac{2}{s^3}$$

ดังนั้น จะได้ระบบสมการ

$$\begin{aligned} 2sX(s) + (s-1)Y(s) &= 2 + \frac{1}{s^2} \quad (1) \\ sX(s) + sY(s) &= 1 + \frac{2}{s^3} \quad (2) \end{aligned}$$

ขั้นที่ 3. หาผลเฉลย $x(t)$ หรือ $y(t)$ โดยการกำจัดตัวแปรอีกหนึ่งตัวและทำการแปลงลาปลาซผกผันฟังก์ชัน $X(s)$ หรือ $Y(s)$ ที่ยังคงอยู่

จากระบบสมการที่ได้ในขั้นที่ 2 การคูณตลอดสมการ (2) ด้วย 2 และนำไปลบออกจาก จากสมการ (1) ทำให้ได้ว่า

$$(-s-1)Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{4}{s^3}$$

หรือ

$$Y(s) = \frac{4-s}{s^3(s+1)}$$

และเมื่อทำการแยกเศษส่วนย่อย จะได้ว่า

$$Y(s) = \frac{5}{s} - \frac{3}{s^2} + \frac{4}{s^3} - \frac{5}{s+1}$$

(Verify?) และเมื่อทำการแปลงลาปลาซผกผันทั้งสองฝั่งของสมการ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} &= 5\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} \\ &\quad +2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\} - 5\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} \\ &= 5 - 5t + 2t^2 - 5e^{-t} \end{aligned}$$

ขั้นที่ 4. นำผลเฉลย $x(t)$ หรือ $y(t)$ ที่ได้จากขั้นที่ 3 มาแทนค่าเพื่อหาผลเฉลยที่เหลือจากสมการ (2) จะพบว่า

$$sX(s) = -sY(s) + \frac{1}{s} + \frac{2}{s^4}$$

เมื่อทำการแปลงลาปลาซผกผันทั้งสองฝั่งของสมการ จะได้ว่า

$$x(t) = -\mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{2}{3!}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\}$$

นั่นคือ

$$x(t) = -y(t) + 1 + \frac{t^3}{3}$$

ดังนั้น

$$x(t) = -4 + 5t - 2t^2 + 5e^{-t} + \frac{t^3}{3}$$

เพราะฉะนั้น ผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นนี้ คือ

$$
\begin{aligned}
x(t) &= -4+5t-2t^2+5e^{-t}+\frac{t^3}{3} \\
y(t) &= -e^{2t}+2e^{3t}
\end{aligned}
$$

$\square$

ตัวอย่าง 2. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$
\begin{aligned}
x''+10x-4y &= 0 \\
-4x+y''+4y &= 0
\end{aligned}
$$

โดยที่ $x(0)=0, x'(0)=1, y(0)=0$ และ $y'(0)=-1$

แบบฝึกหัด

แบบฝึกหัด 1. จงใช้ผลการแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x+y \\ \frac{dy}{dt} &= 2x \end{aligned}$$

โดยที่ $x(0)=0, \quad y(0)=1$

แบบฝึกหัด 2. จงใช้ผลการแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2y+e^t \\ \frac{dy}{dt} &= 8x-t \end{aligned}$$

โดยที่ $x(0)=1, \quad y(0)=1$

แบบฝึกหัด 3. จงใช้ผลการแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}+3x+\frac{dy}{dt} &= 1 \\ \frac{dx}{dt}-x+\frac{dy}{dt}-y &= e^t \end{aligned}$$

โดยที่ $x(0)=0, \quad y(0)=0$

แบบฝึกหัด 4. จงใช้ผลการแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\begin{aligned} 2\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}-2x &= 1 \\ \frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}-3x-3y &= 2 \end{aligned}$$

โดยที่ $x(0)=0, \quad y(0)=0$

แบบฝึกหัด 5. จงใช้ผลการแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}+x-\frac{dy}{dt}+y &= 0 \\ \frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}+2y &= 0 \end{aligned}$$

โดยที่ $x(0)=0, \quad y(0)=1$

แบบฝึกหัด 6. จงใช้ผลการแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}+x-y &= 0\\ \frac{d^2y}{dt^2}+y-x &= 0\end{aligned}$$

โดยที่ $x(0)=0, x'(0)=-2, y(0)=0, \quad y'(0)=1$

แบบฝึกหัด 7. จงใช้ผลการแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt} &= 0\\ \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}-4\frac{dx}{dt} &= 0\end{aligned}$$

โดยที่ $x(0)=1, x'(0)=0, y(0)=-1, \quad y'(0)=5$

แบบฝึกหัด 8. จงใช้ผลการแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2y}{dt^2} &= t^2\\ \frac{d^2x}{dt^2}-\frac{d^2y}{dt^2} &= 4t\end{aligned}$$

โดยที่ $x(0)=8, x'(0)=0, y(0)=0, \quad y'(0)=0$

แบบฝึกหัด 9. จงใช้ผลการแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}-4x+\frac{d^3y}{dt^3} &= 6\sin t\\ \frac{dx}{dt}+2x-2\frac{d^3y}{dt^3} &= 0\end{aligned}$$

โดยที่ $x(0)=0, y(0)=0, y'(0)=0 \quad y''(0)=0$

แบบฝึกหัด 10. จงใช้ผลการแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+3y &= 0\\ \frac{d^2y}{dt^2}+3y &= te^{-t}\end{aligned}$$

โดยที่ $x(0)=0, x'(0)=2, \quad y(0)=0$