7.1 สมการโคชี-ออยเลอร์

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาการหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้นที่มีรูปแบบเฉพาะดังนี้

บทนิยาม 1. (สมการโคชี-ออยเลอร์)
เราจะเรียกสมการเชิงเส้นที่อยู่ในรูป

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x)$$

โดยที่ $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ และ a_0 เป็นค่าคงตัว ว่า **สมการโคชี-ออยเลอร์** (Cauchy-Euler equation)

กำหนดให้ $x \in (0, +\infty)$ เราสามารถพิจารณาผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี-ออยเลอร์เอกพันธุ์อันดับ n โดยการเริ่มจากสมการเชิงอนุพันธ์อับดับสองดังนี้ พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์

$$ax^2 y'' + bxy' + cy = 0 \tag{1}$$

โดยที่ a, b และ c เป็นค่าคงตัวที่ $a \neq 0$ พิจารณาผลเฉลยที่อยู่ในรูป $y = x^m$ จะได้ว่า

$$y' = mx^{m-1}$$

และ

$$y'' = m(m-1)x^{m-2}$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$am(m-1)x^{m-2} + bmx^{m-1} + cx^m = 0$$

นั่นคือ

$$x^m\left(am(m-1)+bm+c\right)=0$$

เนื่องจาก $x^m \neq 0$ เสมอ จึงได้ว่า ผลเฉลย $y = x^m$ นี้ขึ้นอยู่กับค่า m ที่เป็นรากของสมการช่วย

$$am^2+(b-a)m+c=0 \qquad (2)$$

สังเกตว่า ผลเฉลยของ (2) คือ

$$m_1 = \frac{-(b-a)+\sqrt{(b-a)^2-4ac}}{2a}$$

และ

$$m_2 = \frac{-(b-a)-\sqrt{(b-a)^2-4ac}}{2a}$$

เพราะฉะนั้น พิจารณาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (2) ได้เป็น 3 กรณี คือ

(i) ราก m_1 และ m_2 เป็นจำนวนจริงที่ไม่ซ้ำกัน ($(b-a)^2-4ac>0$)

(ii) ราก m_1 และ m_2 เป็นจำนวนจริงที่ซ้ำกัน ($(b-a)^2-4ac=0$)

(iii) ราก m_1 และ m_2 เป็นจำนวนซ้อนสังยุค ($(b-a)^2-4ac<0$)

กรณี 1 *รากเป็นจำนวนจริงที่ไม่ซ้ำกัน*

เนื่องจากสมการช่วยมีรากจำนวนจริงที่ไม่ซ้ำกัน m_1 และ m_2 จึงได้ว่า

$$y_1 = x^{m_1} \qquad \text{และ} \qquad y_2 = x^{m_2}$$

เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (1) และเนื่องจาก x^{m_1} และ x^{m_2} อิสระเชิงเส้นบน $(0,+\infty)$ (Verify?) ส่งผลให้ได้ว่า $\{x^{m_1}, x^{m_2}\}$ เป็นเซตผลเฉลยหลักมูลของสมการเชิงอนุพันธ์ (1) เพราะฉะนั้น ผลเฉลยทั่วไปของ (1) บน $(0,+\infty)$ คือ

$$y = c_1x^{m_1}+c_2x^{m_2}$$

กรณี 2 *รากเป็นจำนวนจริงที่ซ้ำกัน*

เนื่องจาก $m_1 = m_2$ จึงได้ว่า $y = x^{m_1}$ เป็นผลเฉลยของสมการ (1) จากการลดทอนอันดับ จะได้ผลเฉลยที่สองของสมการ (1) คือ

$$y_2 = x^{m_1} \int \frac{e^{-\int \frac{b}{ax}dx}}{x^{2m_1}} dx = x^{m_1} \int \frac{e^{\left(-\frac{b}{a}\ln x\right)}}{x^{2m_1}} dx = x^{m_1} \int x^{\left(-\frac{b}{a}-2m_1\right)} dx$$

และเนื่องจาก $(b-a)^2 - 4ac = 0$ จะได้ว่า $m_1 = m_2 = \frac{-(b-a)}{2a}$ ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$y_2 = x^{m_1} \int x^{\left(-\frac{b}{a}+2\frac{(b-a)}{2a}\right)} dx = x^{m_1} \int \frac{1}{x} dx = x^{m_1} \ln x$$

เนื่องจากผลเฉลย x^{m_1} และ $x^{m_1}\ln x$ อิสระเชิงเส้นบน $(0,+\infty)$ (Verify?) จึงได้ว่า $\{x^{m_1}, x^{m_1}\ln x\}$ เป็นเซตผลเฉลยหลักมูลของสมการเชิงอนุพันธ์ (1) เพราะฉะนั้น ผลเฉลยทั่วไปของ (1) บน $(0,+\infty)$ คือ

$$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_1} \ln x$$

กรณี 3 *รากเป็นจำนวนเชิงซ้อนสังยุค*

เนื่องจาก m_1 และ m_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน นั่นคือ

$$m_1 = \alpha + i\beta \qquad \text{และ} \qquad m_2 = \alpha - i\beta$$

โดยที่ $\alpha > 0$ และ $\beta > 0$ เป็นค่าคงตัวและ $i^2 = -1$ ซึ่งส่งผลให้ได้ว่า (ในทำนองเดียวกับกรณี 1) ผลเฉลยทั่วไปของ (1) บน $(0,+\infty)$ คือ

$$y = C_1 x^{(\alpha+i\beta)} + C_2 x^{(\alpha-i\beta)} \tag{3}$$

ซึ่งสามารถเขียนผลเฉลยนี้ในรูปฟังก์ชันของจำนวนจริงได้ดังนี้

จากเอกลักษณ์ของลอการิทึมธรรมชาติ จะได้ว่า

$$x^{i\beta} = (e^{\ln x})^{i\beta} = e^{i(\beta \ln x)}$$

จากสูตรของออยเลอร์

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

โดยที่ θ เป็นค่าคงตัวใด ๆ จึงได้ว่า

$$x^{i\beta} = \cos(\beta \ln x) + i \sin(\beta \ln x) \qquad \text{(Verify?)}$$

และ

$$x^{-i\beta} = \cos(\beta \ln x) - i \sin(\beta \ln x) \qquad \text{(Verify?)}$$

นั่นคือ สมการ (3) จะกลายเป็น

$$\begin{aligned} y &= x^{\alpha}[C_1 x^{i\beta} + C_2 x^{-i\beta}] \\ &= x^{\alpha}[C_1(\cos(\beta \ln x) + i \sin(\beta \ln x)) + C_2(\cos(\beta \ln x) - i \sin(\beta \ln x))] \\ &= x^{\alpha}[(C_1 + C_2)\cos(\beta \ln x) + (C_1 - C_2) i \sin(\beta \ln x)] \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$y = x^{\alpha}[c_1 \cos(\beta \ln x) + c_2 i \sin(\beta \ln x)]$$

โดยที่ $c_1 := C_1 + C_2$ และ $c_2 := C_1 - C_2$ ตามลำดับ

เพราะฉะนั้น

$$x^{\alpha}\cos(\beta \ln x) \qquad \text{และ} \qquad x^{\alpha}\sin(\beta \ln x)$$

เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (1)

เนื่องจาก $x^{\alpha}\cos(\beta \ln x)$ และ $x^{\alpha}\sin(\beta \ln x)$ อิสระเชิงเส้นบน $(0, +\infty)$ (Verify?) จึงได้ว่า $\{x^{\alpha}\cos(\beta \ln x), x^{\alpha}\sin(\beta \ln x)\}$ เป็นเซตผลเฉลยหลักมูลของสมการเชิงอนุพันธ์ (1) เพราะฉะนั้น ผลเฉลยทั่วไปของ (1) บน $(0, +\infty)$ คือ

$$\boxed{y = c_1 x^{\alpha}\cos(\beta \ln x) + c_2 x^{\alpha}\sin(\beta \ln x)}$$

จากการวิเคราะห์ข้างต้นสามารถสรุปวิธีการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี-ออยเลอร์เอกพันธุ์อันดับสองได้ดังนี้

วิธีการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี-ออยเลอร์เอกพันธุ์อันดับสอง

พิจารณาสมการเอกพันธุ์

$$ay'' + by' + cy = 0$$

โดยที่ a, b และ c เป็นค่าคงตัวที่ $a \neq 0$

1. หาสมการช่วย โดยกำหนดให้ $x \in (0, +\infty)$ และสมมติให้ $y = x^m$ เป็นผลเฉลยสองสมการที่กำหนดให้
2. หารากทั้งหมดของสมการช่วย
3. พิจารณาผลเฉลยทั่วไป ดังนี้

   (i) ถ้าราก m_1 และ m_2 เป็นจำนวนจริงที่ไม่ซ้ำกัน แล้วผลเฉลยทั่วไปบน $(0, +\infty)$ คือ

   $$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}$$

   (ii) ถ้าราก m_1 และ m_2 เป็นจำนวนจริงที่ซ้ำกัน แล้วผลเฉลยทั่วไปบน $(0, +\infty)$ คือ

   $$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_1} \ln x$$

   (iii) ราก m_1 และ m_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนสังยุค โดยที่ $m_1 = \alpha + i\beta$ และ $m_2 = \alpha - i\beta$ แล้วผลเฉลยทั่วไปบน $(0, +\infty)$ คือ

   $$y = c_1 x^{\alpha} \cos(\beta \ln x) + c_2 x^{\alpha} \sin(\beta \ln x)$$

ตัวอย่าง 1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี-ออยเลอร์

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - 4y = 0$$

ตัวอย่าง 2. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี-ออยเลอร์

$$4x^2\frac{d^2y}{dx^2}+8x\frac{dy}{dx}+y=0$$

ในกรณีที่เป็นสมการอันดับสูงและ m_1 เป็นรากซ้ำกันจำนวน k ราก จะได้ว่า ฟังก์ชัน $x^{m_1}, x^{m_1}\ln x, x^{m_1}(\ln x)^2, \ldots, x^{m_1}(\ln x)^k$ เป็นผลเฉลยของสมการอันดับสูงนั้น ๆ ด้วย เพราะฉะนั้น ผลเฉลยทั่วไปจะอยู่ในรูปของผลรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันทั้งหมดนี้ (Verify?)

ตัวอย่าง 3. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี-ออยเลอร์

$$4x^2y'' + 17y = 0$$

ตัวอย่าง 4. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี-ออยเลอร์

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3}+5x^2\frac{d^2y}{dx^2}+7x\frac{dy}{dx}+8y=0$$

ในกรณีที่สมการโคชี-ออยเลอร์ไม่เป็นสมการเอกพันธุ์ เราสามารถใช้การแปรผันตัวแปร ในการหาผลเฉลยเฉพาะได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี-ออยเลอร์

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 3y = 2x^4e^x$$

แบบฝึกหัด

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี-ออยเลอร์ต่อไปนี้

แบบฝึกหัด 1. $x^2y'' - 2y = 0$

แบบฝึกหัด 2. $xy'' + y' = 0$

แบบฝึกหัด 3. $x^2y'' + 5xy' + 3y = 0$

แบบฝึกหัด 4. $25x^2y'' - 3xy' - 2y = 0$

แบบฝึกหัด 5. $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$

แบบฝึกหัด 6. $x^2y'' - 7xy' + 41y = 0$

แบบฝึกหัด 7. $x^3y''' - 6y = 0$

แบบฝึกหัด 8. $x^3y''' + xy' - y = 0$

แบบฝึกหัด 9. $xy^{(4)} + 6y''' = 0$

แบบฝึกหัด 10. $x^4y^{(4)} + 6x^3y''' + 9x^2y'' + 3xy' + y = 0$

แบบฝึกหัด 11. $xy'' - 4y' = x^4$

แบบฝึกหัด 12. $2x^2y'' + 5xy' + y = x^2 - xx$

แบบฝึกหัด 13. $x^2y'' - xy' + y = 2x$

แบบฝึกหัด 14. $x^2y'' + xy' - y = \ln x$

แบบฝึกหัด 15. $x^2y'' + xy' - y = \frac{1}{x+1}$