

Equations of Surfaces - sphere, cylinder

กลุ่ม 01

Chapter 1 Surfaces and Coordinate Systems

แบบฝึกหัด:

ABD12 : Section 11.1 : 9, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19-22, 23-28, 34, 47

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาสมการของผิวที่สำคัญ ได้แก่ ทรงกลม และทรงกระบอก ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

บทนิยาม 1. ทรงกลม (sphere) คือ เซตของจุดใด ๆ ในปริภูมิ xyz ที่มีระยะห่างจากจุดที่ตรึงไว้ (fixed point) เป็นค่าคงตัว

- เราจะเรียกจุดที่ตรึงไว้นี้ว่า จุดศูนย์กลาง (radius) และเรียกระยะห่างที่เป็นค่าคงตัวนี้ว่า รัศมี (radius) ของทรงกลม
- สมการมาตรฐานของทรงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง (x_0, y_0, z_0) และรัศมี $r > 0$ คือ

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

ตัวอย่าง 1. จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของทรงกลมต่อไปนี้

- $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 8z - 7 = 0$

- $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 10y + 14z - 6 = 0$

ตัวอย่าง 2. จงหาสมการของทรงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง $(1, 1, 13)$ และสัมผัสกับระนาบ $4x + 3y + 12z - 59 = 0$

บทนิยาม 2. กำหนดให้ \mathbf{v} เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ และ C เป็นเส้นโค้งในปริภูมิ 2 มิติ ทรงกระบอก (cylinder) คือ ผิวที่เกิดจากการขยายเส้นโค้ง C ขนานไปตามเวกเตอร์ \mathbf{v}

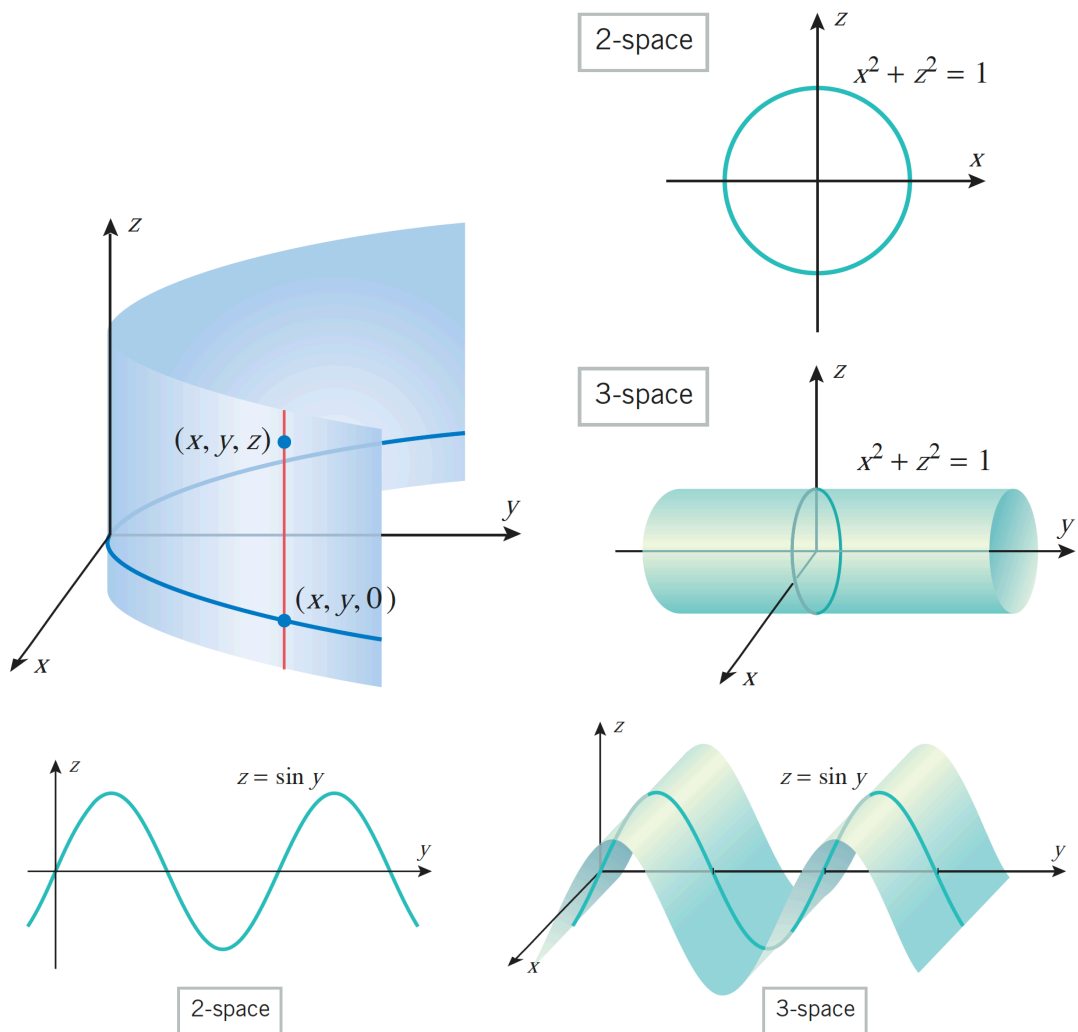


Figure 1: ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 770-771)

กำหนดให้ C เป็นเส้นโค้งในปริภูมิ 2 มิติ และ \mathbf{v} เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ เราสามารถหาสมการของทรงกระบอกซึ่งก่อกำเนิดโดยเส้นโค้ง C และเวกเตอร์ \mathbf{v} ได้ดังนี้

1. กำหนดให้ $P(x, y, z)$ เป็นจุดใด ๆ บนทรงกระบอก
2. ให้ $Q(x', y', z')$ เป็นจุดบนเส้นโค้ง C จะได้ว่า PQ ขนานกับ \mathbf{v} นั่นคือ จะมี $m \in \mathbb{R}$ ที่ซึ่ง $PQ = m\mathbf{v}$
3. จาก 2. จัดรูป x', y' และ z' ให้อยู่ในรูปของ x, y และ z
4. แทนค่า x', y' และ z' จาก 3. ในสมการของเส้นโค้ง C

ตัวอย่าง 3. จงหาสมการของทรงกระบอกซึ่งเกิดจากเส้นโค้ง $4x^2 + y^2 = 1, z = 0$ และเวกเตอร์ $\mathbf{v} = \mathbf{k}$

ในกรณีที่มีการกำหนดสมการที่ปรากฏเพียงสองตัวแปรจาก x, y และ z ในปริภูมิ xyz ผิวของทรงกระบอกที่เกิดจากสมการดังกล่าวสามารถสร้างได้โดยการร่างเส้นโค้ง C ของสมการนั้น ๆ จากนั้นขยายเส้นโค้ง C ขนานไปตามแกนของตัวแปรที่ไม่ปรากฏในสมการ

ตัวอย่าง 4. จงร่างผิวทรงกระบอกซึ่งเกิดจากเส้นโค้ง $z = y^2$

ตัวอย่าง 5. จงร่างผิวทรงกระบอกซึ่งเกิดจากเส้นโค้ง $x^2 + 4z^2 = 9$