Equations of Surfaces - sphere, cylinder

แบบฝึกหัด:

ABD12 : Section 11.1 : 9, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19-22, 23-28, 34, 47

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาสมการของผิวที่สำคัญ ได้แก่ ทรงกลม และทรงกระบอก ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

บทนิยาม 1. ทรงกลม (sphere) คือ เซตของจุดใด ๆ ในปริภูมิ xyz ที่มีระยะห่างจากจุดที่ตรึงไว้ (fixed point) เป็นค่าคงตัว

- เราจะเรียกจุดที่ตรึงไว้นี้ว่า จุดศูนย์กลาง (center ~~radius~~) และเรียกระยะห่างที่เป็นค่าคงตัวนี้ว่า รัศมี (radius) ของทรงกลม
- สมการมาตรฐานของทรงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง (x_0, y_0, z_0) และรัศมี $r > 0$ คือ

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2$$

ตัวอย่าง 1. จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของทรงกลมต่อไปนี้

- $x^2+y^2+z^2+4x-6y+8z-7=0$
- $x^2+y^2+z^2+2x-10y+14z-6=0$

① วิธีทำ

$$x^2+y^2+z^2+4x-6y+8z-7=0$$

$$\Rightarrow x^2+\underset{2(2)}{4x}+2^2+y^2\underset{2(-3)}{-6y}+(-3)^2+z^2\underset{2(4)}{+8z}+4^2=7+2^2+(-3)^2+4^2$$

$$\Rightarrow (x+2)^2+(y-3)^2+(z+4)^2=36=6^2$$

$\Rightarrow$ จุดศูนย์กลาง คือ $(-2,3,-4)$ และรัศมีคือ 6 หน่วย

$$x^2+y^2+z^2+2x-10y+14z-6=0$$

$$\underset{x\ x}{x^2}+2x+\underset{1\ 1}{1}+y^2-10y+(-5)^2+z^2+14z+7^2=6+1+(-5)^2+7^2$$

$$=6+1+25+49$$

$$=81$$

$$(x+1)^2+(y-5)^2+(z+7)^2=9^2$$

center point $=(-1,5,-7)$ และ $r=9$

ตัวอย่าง 2. จงหาสมการของทรงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง $(1,1,13)$ และสัมผัสกับระนาบ $4x+3y+12z-59=0$

Note! ระยะทางจากจุด (x_0,y_0,z_0) ไปยังระนาบ $ax+by+cz+d=0$

คือ $$\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

วิธีทำ พิจารณารัศมีของทรงกลม คือ

$$\frac{|4(1)+3(1)+12(13)-59|}{\sqrt{4^2+3^2+12^2}} = \frac{|4+3+156-59|}{\sqrt{169}}$$

$$= \frac{104}{13} = 8 \text{ หน่วย}$$

ดังนั้น สมการมาตรฐานของทรงกลม คือ

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-13)^2 = 8^2 = 64$$ #

บทนิยาม 2. กำหนดให้ $\mathbf{v}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ และ C เป็นเส้นโค้งในปริภูมิ 2 มิติ ทรงกระบอก (cylinder) คือ ผิวที่เกิดจากการขยายเส้นโค้ง C ขนานไปตามเวกเตอร์ $\mathbf{v}$

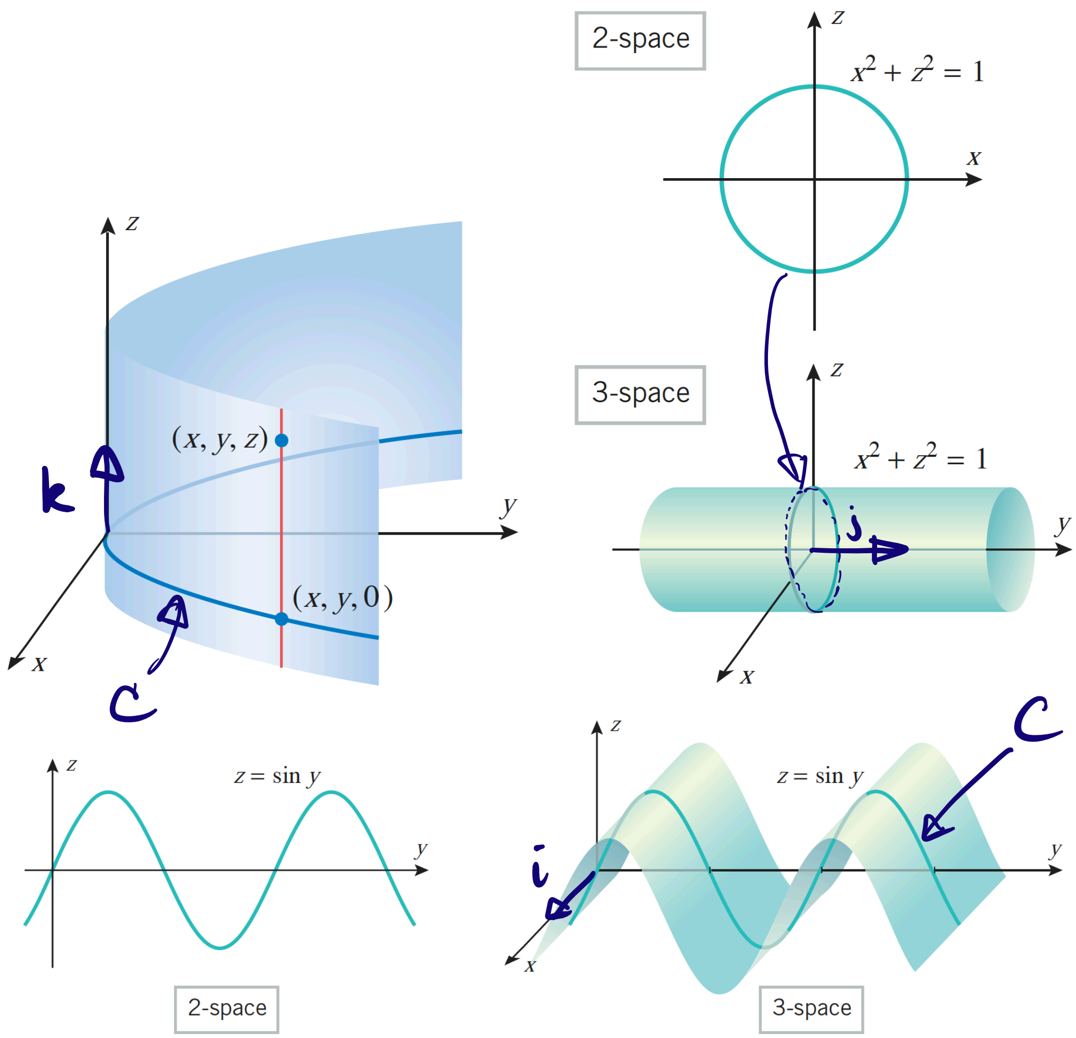
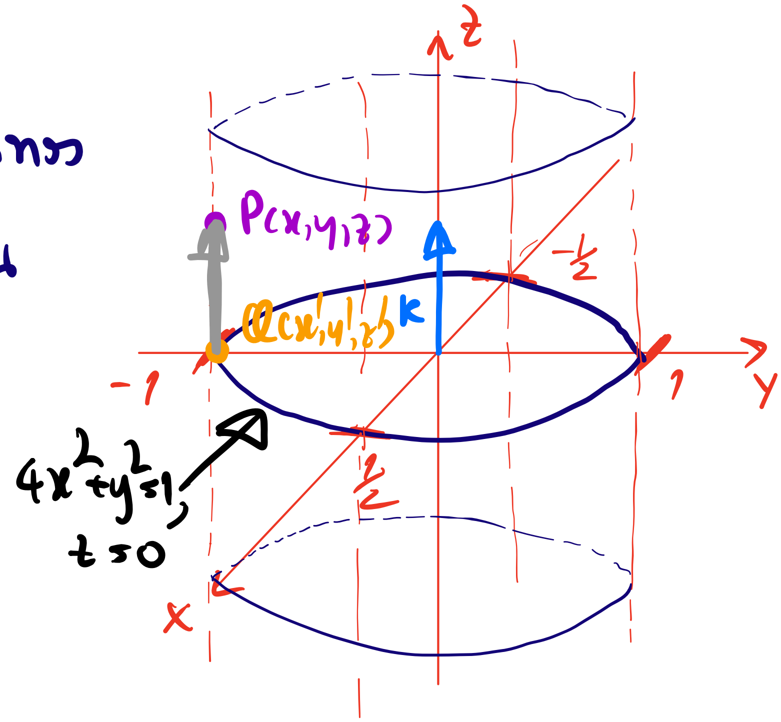


Figure 1: ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 770-771)

กำหนดให้ C เป็นเส้นโค้งในปริภูมิ 2 มิติ และ $\mathbf{v}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ เราสามารถหาสมการของทรงกระบอกซึ่งก่อกำเนิดโดยเส้นโค้ง C และเวกเตอร์ $\mathbf{v}$ ได้ดังนี้

1. กำหนดให้ $P(x,y,z)$ เป็นจุดใด ๆ บนทรงกระบอก
2. ให้ $Q(x',y',z')$ เป็นจุดบนเส้นโค้ง C จะได้ว่า PQ ขนานกับ $\mathbf{v}$ นั่นคือ จะมี $m \in \mathbb{R}$ ที่ซึ่ง $PQ = m\mathbf{v}$
3. จาก 2. จัดรูป x', y' และ z' ให้อยู่ในรูปของ x, y และ z
4. แทนค่า x', y' และ z' จาก 3. ในสมการของเส้นโค้ง C

ตัวอย่าง 3. จงหาสมการของทรงกระบอกซึ่งเกิดจากเส้นโค้ง $4x^2+y^2 = 1, z = 0$ และเวกเตอร์ $\mathbf{v} = \mathbf{k}$



วิธีทำ ให้ $P(x,y,z)$ เป็นจุดใดๆ บนทรงกระบอก และให้ $Q(x',y',z')$ อยู่บนเส้นโค้ง C

นั่นคือ

$4(x')^2+(y')^2=1,\ z'=0$

จะได้ว่า

$\overrightarrow{PQ} \parallel \mathbf{v}$

นั่นคือ มี $m \in \mathbb{R}$ ที่ $\overrightarrow{PQ} = m\mathbf{v}$

$\Rightarrow (x'-x, y'-y, z'-z) = m(0,0,1) = (0,0,m)$

$\Rightarrow x' - x = 0, \quad y' - y = 0$ และ $z' - z = m$

$\Rightarrow x' = x, \quad y' = y$ และ $z = -m$

$\Downarrow$

$z \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow 4x^2 + y^2 = 1,$

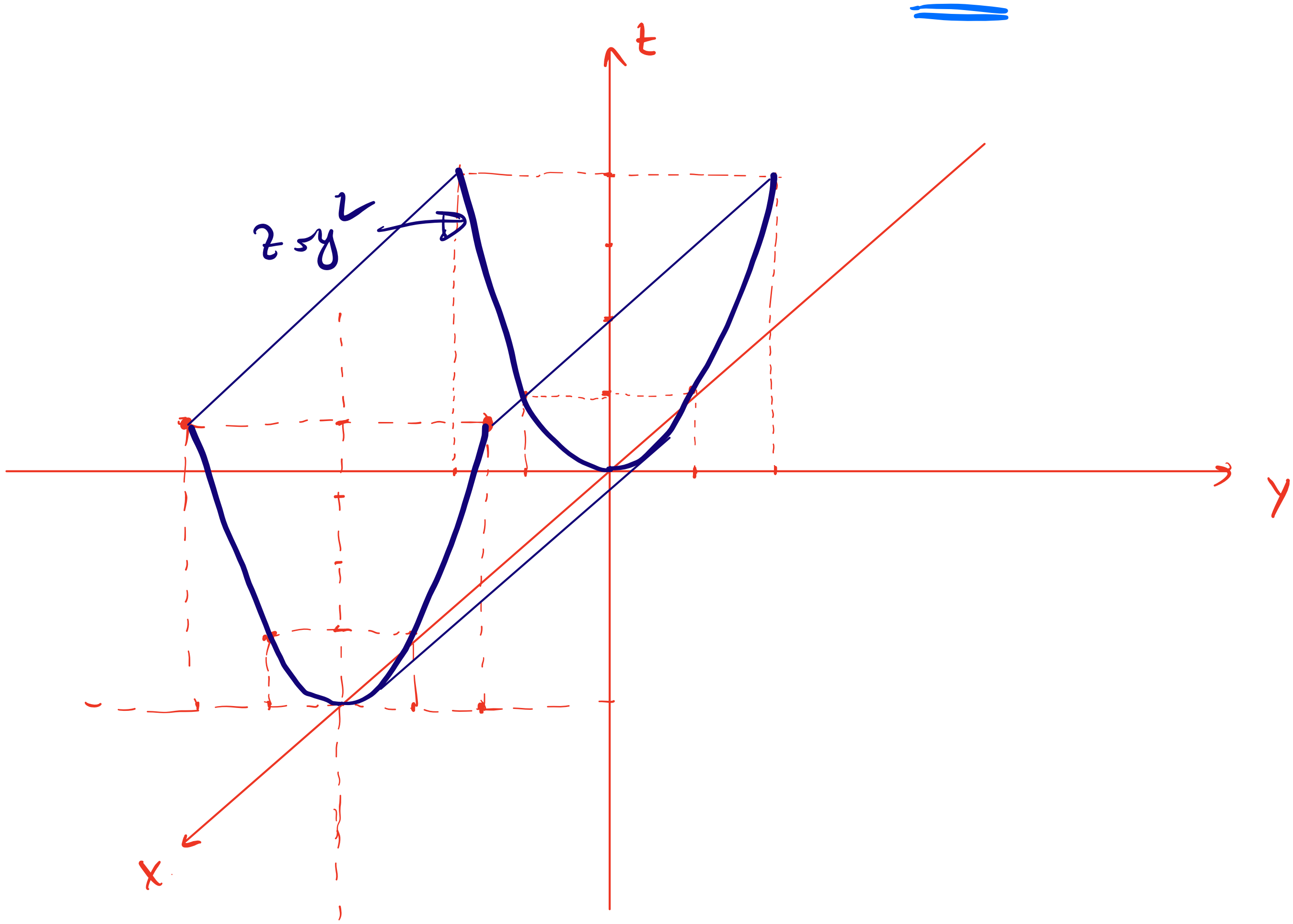
ดังนั้น สมการของทรงกระบอก คือ

$$4x^2 + y^2 = 1$$

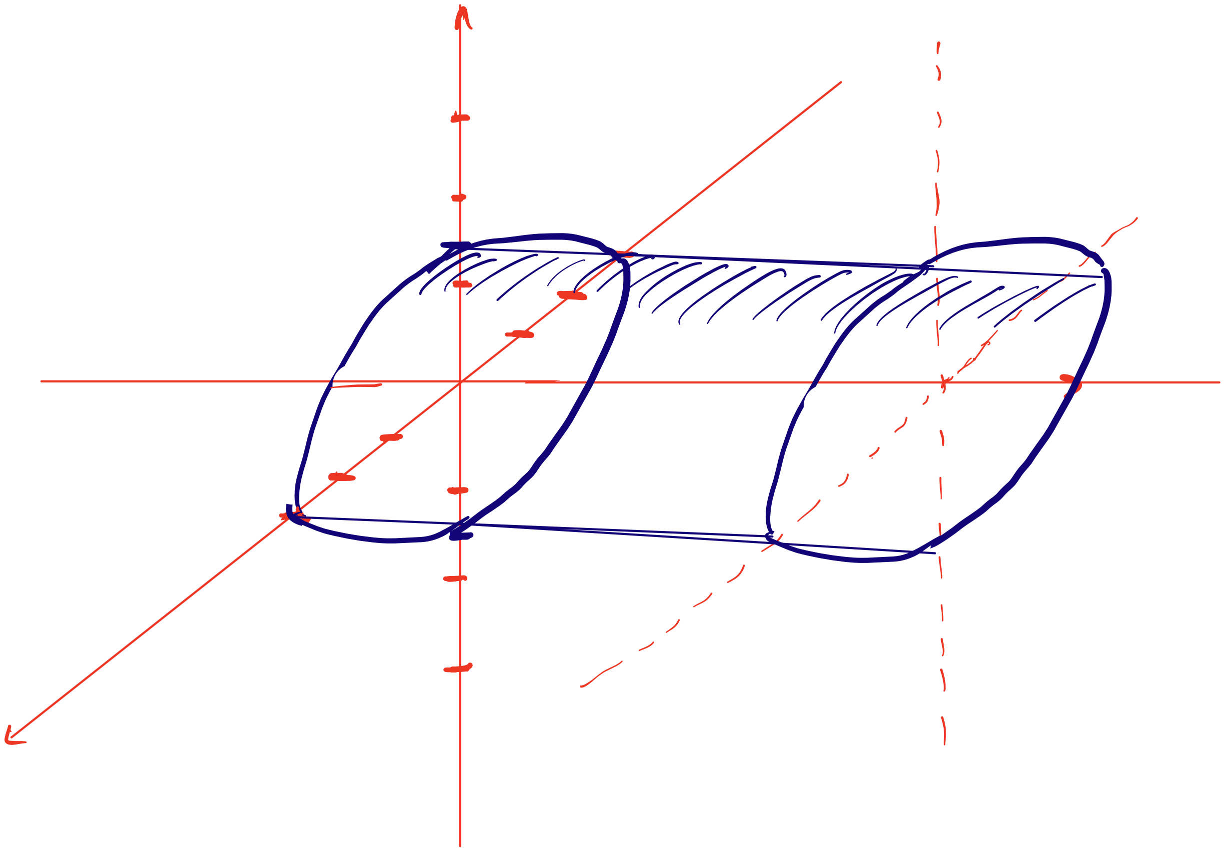
#

ในกรณีที่มีการกำหนดสมการที่ปรากฏเพียงสองตัวแปรจาก x, y และ z ในปริภูมิ xyz ผิวของทรงกระบอกที่เกิดจากสมการดังกล่าวสามารถสร้างได้โดยการร่างเส้นโค้ง C ของสมการนั้น ๆ จากนั้นขยายเส้นโค้ง C ขนานไปตามแกนของตัวแปรที่ไม่ปรากฏในสมการ

ตัวอย่าง 4. จงร่างผิวทรงกระบอกซึ่งเกิดจากเส้นโค้ง $z = y^2$



ตัวอย่าง 5. จงร่างผิวทรงกระบอกซึ่งเกิดจากเส้นโค้ง $x^2+4z^2=9$



จาก $x^2+4z^2=9 \Rightarrow \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{4z^2}{9}=1$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{3^2}+\frac{z^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=1$$