

Cylindrical and Spherical Coordinate Systems

กลุ่ม 01

Chapter 1 Surfaces and Coordinate Systems

แบบฝึกหัด:

ABD12 : Section 11.8 : 1-2,3-4,5-6,7-8,15-18,19-26,27-34,35-46,47-50,51,52,53

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาระบบพิกัดในปริภูมิสามมิติอีกสองระบบ ได้แก่ ระบบพิกัดทรงกระบอก และระบบพิกัดทรงกลม ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

บทนิยาม 1. ให้ P เป็นจุดในระบบพิกัดทรงกระบอก (cylindrical coordinate system) แล้ว P มีพิกัดในรูป (r, θ, z) โดยที่

- i) $r \geq 0$ และ $\theta \in [0, 2\pi)$ เป็นตำแหน่งในระบบพิกัดเชิงขั้วของภาพฉาย (projection) ของจุด P บนระนาบ xy
- ii) $z \in \mathbb{R}$ เป็นตำแหน่งของ z ในระบบพิกัดฉากของจุด P ตามแนวแกน z

ซึ่งสามารถอธิบายได้ดัง Figure 1

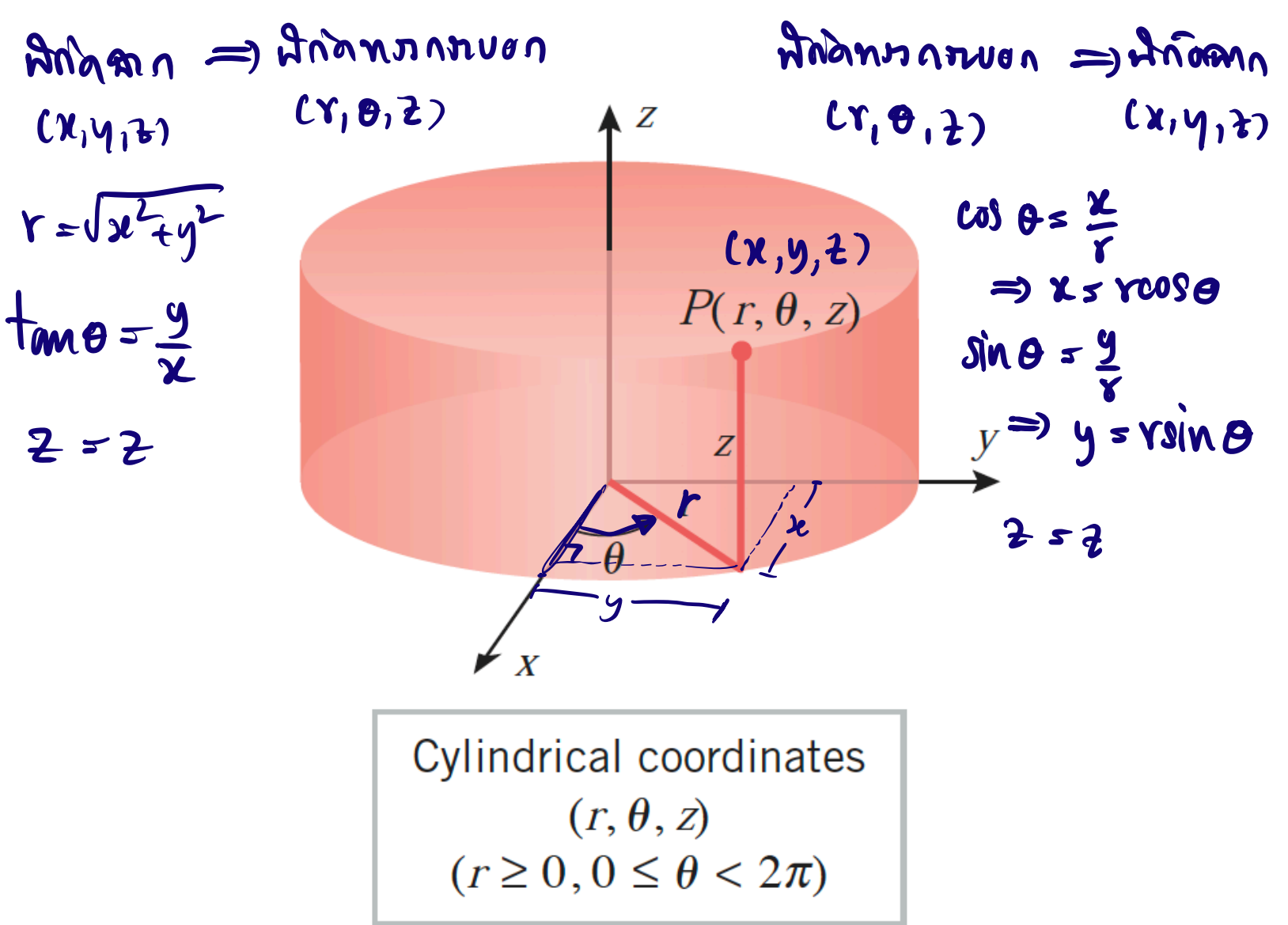


Figure 1: จุด P ในระบบพิกัดทรงกระบอก. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 832)

โดยปกติ เราทราบว่าผิวของสมการ

$$x = x_0, \quad y = y_0 \quad \text{และ} \quad z = z_0$$

โดยที่ x_0, y_0 และ z_0 เป็นค่าคงตัว เป็นระนาบที่ขนานกับระนาบ yz, xz และ xy ตามลำดับ ดัง Figure 2

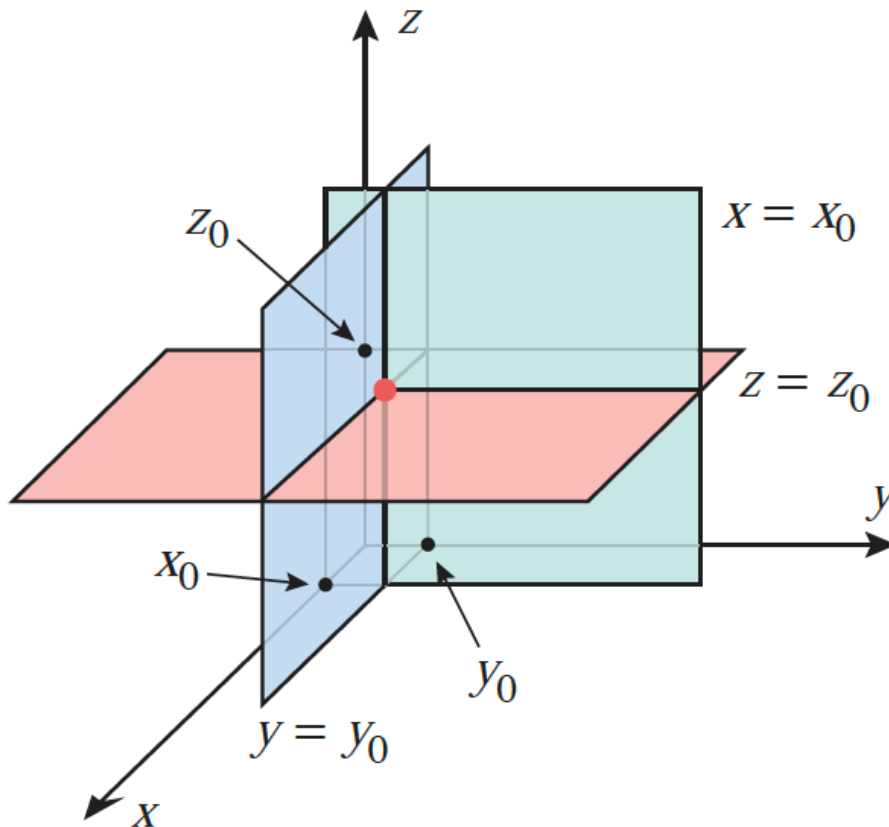


Figure 2: ผิวของสมการ $x = x_0, y = y_0, z = z_0$. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 832)

อย่างไรก็ตาม ในระบบพิกัดทรงกระบอก ผิวของสมการ

$$r = r_0, \quad \theta = \theta_0 \quad \text{และ} \quad z = z_0$$

โดยที่ $r_0 \geq 0, \theta \in [0, 2\pi)$ และ $z_0 \in \mathbb{R}$ เป็นค่าคงตัว เป็นดัง Figure 3

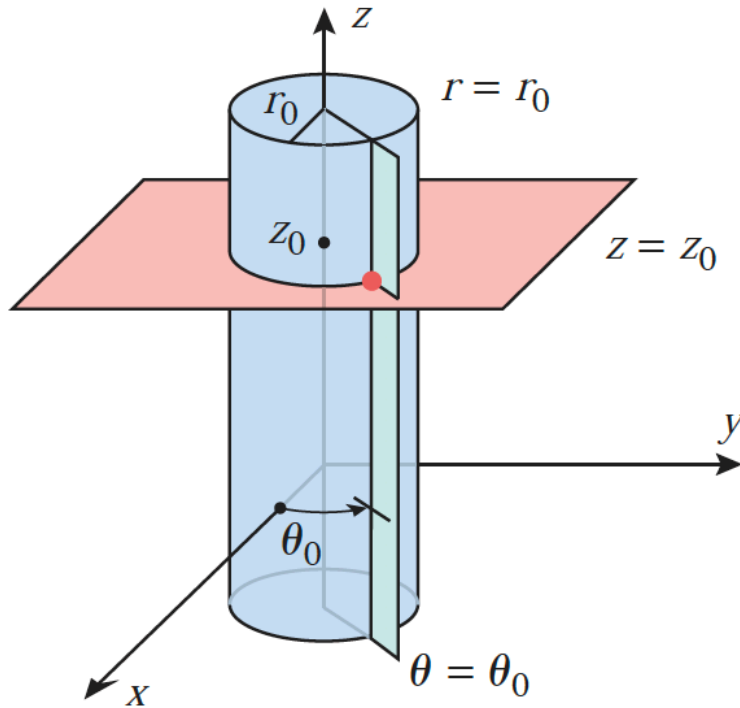


Figure 3: ผิวของสมการ $r = r_0, \theta = \theta_0, z = z_0$. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 833)

หมายเหตุ 1. จากผิวของสมการ $r = r_0, \theta = \theta_0$ และ $z = z_0$ สามารถสรุปลักษณะได้ดังนี้

- i) ผิว $r = r_0$ เป็นผิวทรงกระบอกตั้งตรง รัศมี r_0 และจุดศูนย์กลางเป็นแกน z
- ii) ผิว $\theta = \theta_0$ เป็นครึ่งระนาบตั้งตรงตามแนวแกน z และทำมุม θ_0 กับฝั่งบวกของแกน x
- iii) ผิว $z = z_0$ เป็นระนาบขนานกับระนาบ xy

บทนิยาม 2. ให้ P เป็นจุดในระบบพิกัดทรงกลม (spherical coordinate system) แล้ว P มีพิกัดในรูป (ρ, θ, ϕ) โดยที่

- i) $\rho \geq 0$ เป็นระยะห่างของจุด P วัดจากจุดกำเนิด O
- ii) $\theta \in [0, 2\pi)$ เป็นมุมที่วัดจากฝั่งบวกของแกน x ไปยังตำแหน่งของภาพฉาย (projection) ของจุด P บนระนาบ xy
- iii) $\phi \in [0, \pi]$ เป็นมุมที่วัดจากฝั่งบวกของแกน z ไปยังส่วนของเส้นตรง OP

ซึ่งสามารถอธิบายได้ดัง Figure 4

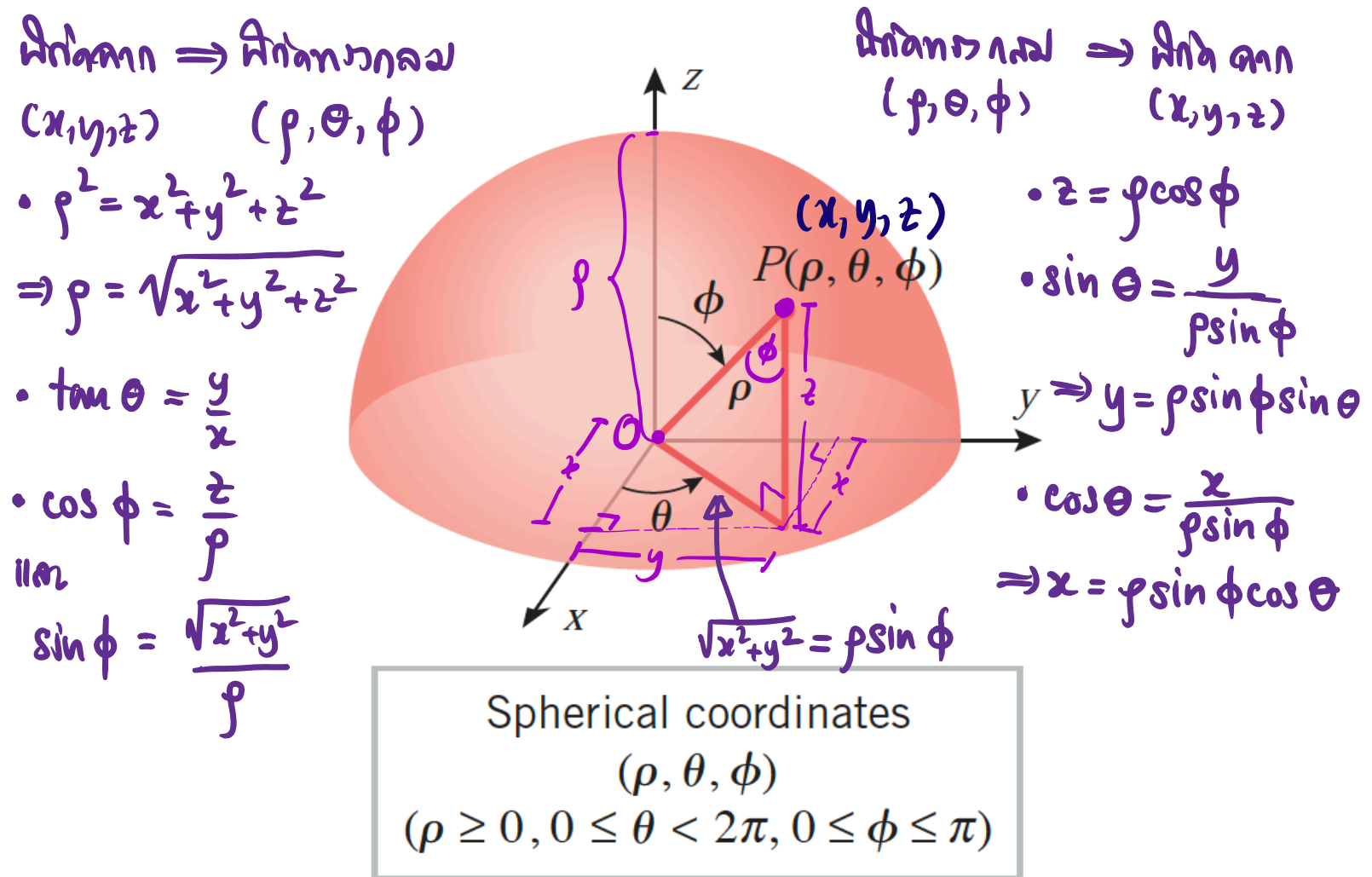


Figure 4: จุด P ในระบบพิกัดทรงกลม. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 832)

ในระบบพิกัดทรงกลม ผิวของสมการ

$$\rho = \rho_0, \quad \theta = \theta_0 \quad \text{และ} \quad \phi = \phi_0$$

โดยที่ $\rho_0 \geq 0, \theta \in [0, 2\pi)$ และ $\phi \in [0, \pi]$ เป็นค่าคงตัว เป็นดัง Figure 5

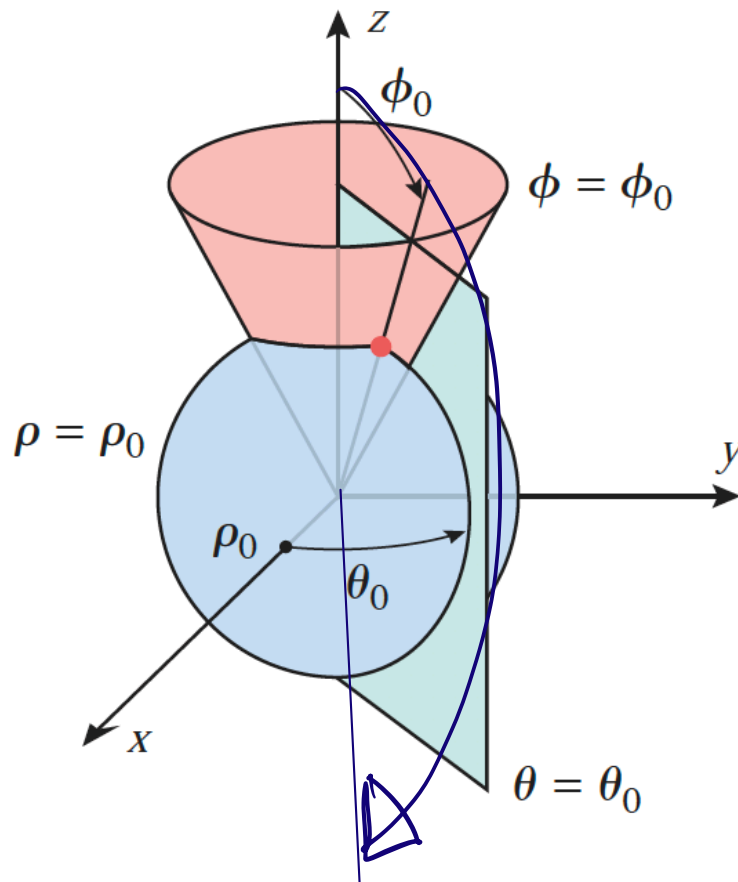


Figure 5: ผิวของสมการ $\rho = \rho_0, \theta = \theta_0, \phi = \phi_0$. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 833)

หมายเหตุ 2. จากผิวของสมการ $\rho = \rho_0, \theta = \theta_0$ และ $\phi = \phi_0$ สามารถสรุปลักษณะได้ดังนี้

- i) ผิว $\rho = \rho_0$ เป็นผิวทรงกลมที่มีรัศมี ρ_0 และจุดศูนย์กลางเป็นจุดกำเนิด
- ii) ผิว $\theta = \theta_0$ เป็นครึ่งระนาบที่ตั้งตรงตามแนวแกน z และทำมุม θ_0 กับฝั่งบวกของแกน x
- iii) ผิว $\phi = \phi_0$ แบ่งเป็นหลายกรณี ดังนี้

ถ้า $\phi_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ แล้วผิวเป็นกรวยหงายที่ผิวกรวยทำมุม ϕ_0 กับฝั่งบวกของแกน z

ถ้า $\phi_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ แล้วผิวเป็นกรวยคว่ำที่ผิวกรวยทำมุม ϕ_0 กับฝั่งบวกของแกน z

ถ้า $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$ แล้วผิวเป็น.....ระนาบ xy

ถ้า $\phi_0 = 0$ แล้วผิวเป็น.....แกน z ฝั่งบวก.....

ถ้า $\phi_0 = \pi$ แล้วผิวเป็น.....แกน z ฝั่งลบ.....

พิจารณาระบบพิกัดทรงกระบอก ระบบพิกัดทรงกลม และระบบพิกัดฉากบนระนาบ xy โดยที่จุดกำเนิดของทั้งสองระบบเป็นจุดเดียวกัน จะพบว่าระบบพิกัดต่าง ๆ มีความสัมพันธ์กันดังนี้

Jump!

จาก	เป็น	สูตร	ข้อจำกัด
(r, θ, z)	(x, y, z)	$x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta$ $z = z$	$r \geq 0$ $\theta \in [0, 2\pi)$ $z \in \mathbb{R}$
(x, y, z)	(r, θ, z)	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\tan \theta = \frac{y}{x}$ $z = z$	
(ρ, θ, ϕ)	(x, y, z)	$x = \rho \sin \phi \cos \theta$ $y = \rho \sin \phi \sin \theta$ $z = \rho \cos \phi$	$\rho \geq 0$ $\theta \in [0, 2\pi)$ $\phi \in [0, \pi]$
(x, y, z)	(ρ, θ, ϕ)	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\tan \theta = \frac{y}{x}$ $\cos \phi = \frac{z}{\rho}$	

$$(r, \theta, z) \Rightarrow (x, y, z)$$

ตัวอย่าง 1. จงหาตำแหน่งในระบบพิกัดฉากของจุดในระบบพิกัดทรงกระบอกต่อไปนี้

1. $P(1, 0, 1)$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = z$$

2. $Q(4, \frac{\pi}{6}, 3)$

① $P(\overset{r}{\underset{=}{1}}, \overset{\theta}{\underset{=}{0}}, \overset{z}{\underset{=}{1}})$

จ.ให้ $x = r \cos \theta = 1 \cos 0 = 1 \cdot 1 = 1$

$$y = r \sin \theta = 1 \sin 0 = 1 \cdot 0 = 0$$

$$z = z = 1$$

$$(1, 0, 1)$$

② $Q(\overset{r}{\underset{=}{4}}, \overset{\theta}{\underset{=}{\frac{\pi}{6}}}, \overset{z}{\underset{=}{3}})$

จ.ให้ $x = r \cos \theta = 4 \cos \frac{\pi}{6} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

$$y = r \sin \theta = 4 \sin \frac{\pi}{6} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$z = z = 3$$

$$(2\sqrt{3}, 2, 3)$$

#

$$(x, y, z) \Rightarrow (r, \theta, z)$$

ตัวอย่าง 2. จงหาตำแหน่งในระบบพิกัดทรงกระบอกของจุดในระบบพิกัดฉากต่อไปนี้

1. $P(1, -1, -1)$

2. $Q(4\sqrt{3}, 4, -4)$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad r \geq 0$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}; \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

$$z = z; \quad z \in \mathbb{R}$$

๑ $P(1, -1, -1)$

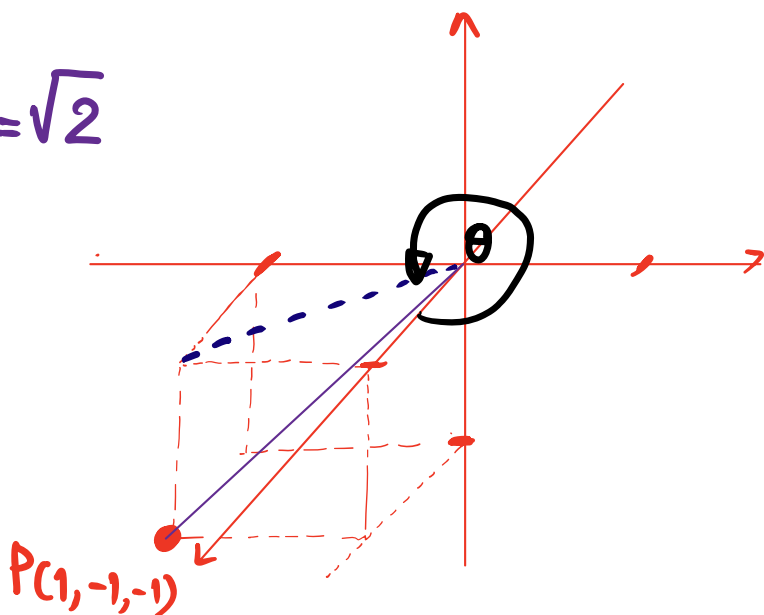
พิกัด $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\Rightarrow \theta = \cancel{\frac{3\pi}{4}}, \frac{2\pi}{4}$$

$(-, +)$ $(+, -)$
~~X~~ \checkmark

$$z = -1$$



๒ $Q(4\sqrt{3}, 4, -4)$

พิกัด $r = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 4^2}$

$$= \sqrt{48 + 16}$$

$$= \sqrt{64} = 8$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}, \cancel{\frac{5\pi}{6}}$$

$(+, +)$ $(-, -)$
 \checkmark ~~X~~

$$z = z = -4$$

ดังนั้น $Q(8, \frac{\pi}{6}, -4)$

$$(r, \theta, \phi) \Rightarrow (x, y, z)$$

ตัวอย่าง 3. จงหาตำแหน่งในระบบพิกัดฉากของจุดในระบบพิกัดทรงกลมต่อไปนี้

1. $P(1, 0, \pi)$

$$x = r \sin \phi \cos \theta$$

$$y = r \sin \phi \sin \theta$$

$$z = r \cos \phi$$

2. $Q(5, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$

① $P(1, 0, \pi)$

$$\begin{aligned} \text{จ.ให้ } x &= r \sin \phi \cos \theta = 1 \sin \pi \cos 0 = 1 \cdot 0 \cdot 1 = 0 \\ y &= r \sin \phi \sin \theta = 1 \sin \pi \sin 0 = 1 \cdot 0 \cdot 0 = 0 \\ z &= r \cos \phi = 1 \cos \pi = 1(-1) = -1 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} x \\ y \\ z \end{aligned}} \right\} (0, 0, -1)$$

② $(\frac{5\sqrt{6}}{4}, \frac{5\sqrt{2}}{4}, \frac{5\sqrt{2}}{2})$

#

$$(x, y, z) \Rightarrow (\rho, \theta, \phi)$$

ตัวอย่าง 4. จงหาตำแหน่งในระบบพิกัดทรงกลมของจุดในระบบพิกัดฉากต่อไปนี้

1. $P(1, 0, 0) \Rightarrow (1, 0, \frac{\pi}{2})$ $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

2. $Q(1, \sqrt{3}, -2)$ $\tan \theta = \frac{y}{x}$

$\cos \phi = \frac{z}{\rho}$

๒. $Q(1, \sqrt{3}, -2)$

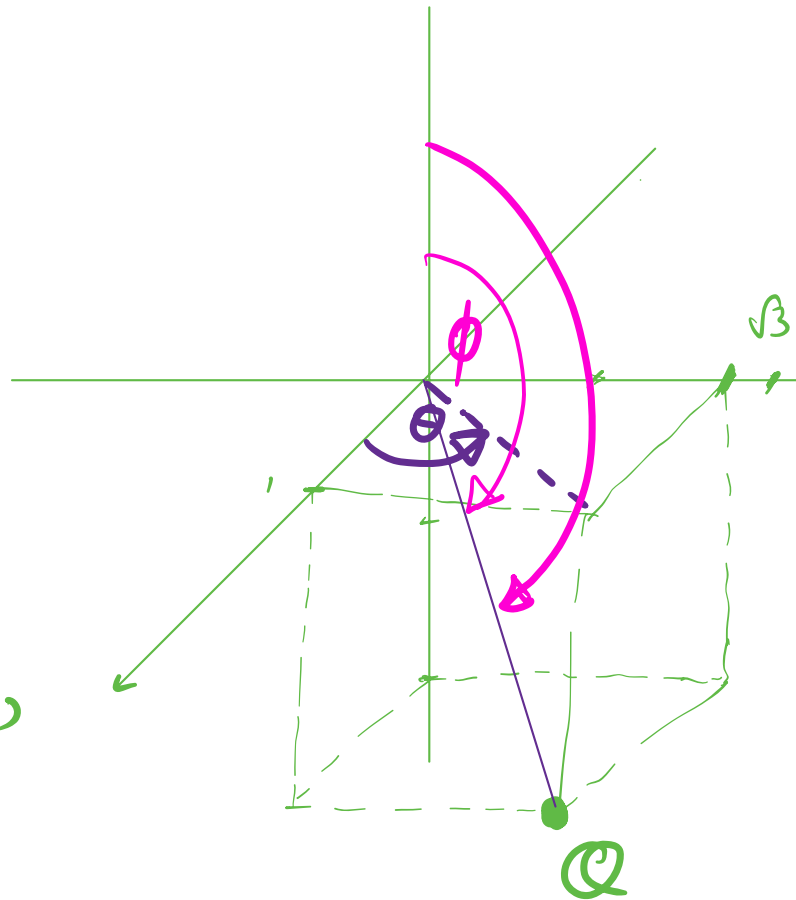
หาค่า $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
 $= \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2 + (-2)^2}$
 $= \sqrt{1 + 3 + 4}$
 $= \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$
 (+, +) (-, -)

$\cos \phi = \frac{z}{\rho} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \phi = \frac{3\pi}{4}$

ดังนั้น $Q(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4})$



$$(r, \theta, z) \Rightarrow (x, y, z)$$

ตัวอย่าง 5. จงหาสมการในระบบพิกัดฉากของผิวที่มีสมการในระบบพิกัดทรงกระบอกต่อไปนี

1. $z = 2 \cos \theta$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

2. $r^2 + z^2 = r^2 \cos \theta \sin \theta$

$$z = z$$

① $z = 2 \cos \theta \Rightarrow z \cdot r = 2r \cos \theta$

$$\Rightarrow z \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = 2x$$

② $r^2 + z^2 = r^2 \cos \theta \sin \theta$

$$\Rightarrow r^2 + z^2 = (r \cos \theta)(r \sin \theta)$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = xy$$

#

$$(r, \theta, \phi) \Rightarrow (x, y, z)$$

ตัวอย่าง 6. จงหาสมการในระบบพิกัดฉากของผิวที่มีสมการในระบบพิกัดทรงกลมต่อไป

นี้

1. $\rho = 2 \cos \phi$

2. $\rho = 6 \sin \phi \sin \theta$

3. $\rho \sin \phi = 4 \cos \theta$

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta \quad | \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$y = \rho \sin \phi \sin \theta \quad |$$

$$z = \rho \cos \phi \quad |$$

$$\textcircled{1} \rho = 2 \cos \phi \Rightarrow \rho^2 = 2 \rho \cos \phi$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 2z$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$$

$$\textcircled{2} \rho = 6 \sin \phi \sin \theta \Rightarrow \rho^2 = 6 \rho \sin \phi \sin \theta$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 6y$$

$$\textcircled{3} \rho \sin \phi = 4 \cos \theta \Rightarrow \rho^2 \sin^2 \phi = 4 \rho \sin \phi \cos \theta$$

$$\Rightarrow \rho^2 \sin^2 \phi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 4 \rho \sin \phi \cos \theta$$

$$\Rightarrow \rho^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta$$

$$= 4 \rho \sin \phi \cos \theta$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 4x$$



ตัวอย่าง 7. จงหาสมการในระบบพิกัดทรงกระบอกและระบบพิกัดทรงกลมของผิวที่มีสมการในระบบพิกัดฉากต่อไปนี้

1. $x + 2y + 3z = 1$

2. $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

3. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$