

Cylindrical and Spherical Coordinate Systems

กลุ่ม 01

Chapter 1 Surfaces and Coordinate Systems

แบบฝึกหัด:

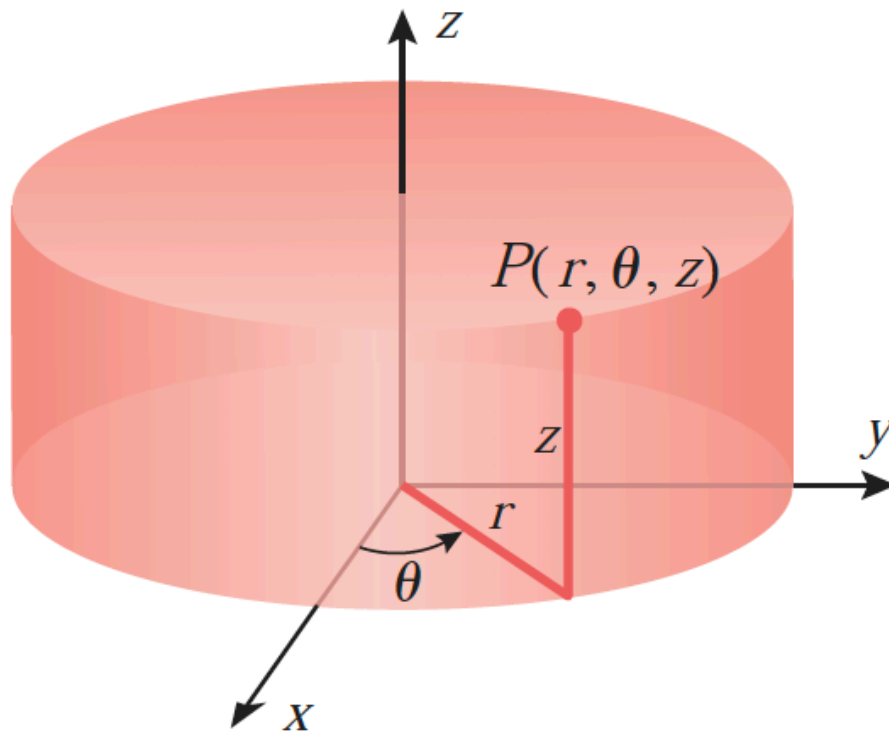
ABD12 : Section 11.8 : 1-2,3-4,5-6,7-8,15-18,19-26,27-34,35-46,47-50,51,52,53

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาระบบพิกัดในปริภูมิสามมิติอีกสองระบบ ได้แก่ ระบบพิกัดทรงกระบอก และระบบพิกัดทรงกลม ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

บทนิยาม 1. ให้ P เป็นจุดในระบบพิกัดทรงกระบอก (cylindrical coordinate system) แล้ว P มีพิกัดในรูป (r, θ, z) โดยที่

- i) $r \geq 0$ และ $\theta \in [0, 2\pi)$ เป็นตำแหน่งในระบบพิกัดเชิงขั้วของภาพฉาย (projection) ของจุด P บนระนาบ xy
- ii) $z \in \mathbb{R}$ เป็นตำแหน่งของ z ในระบบพิกัดฉากของจุด P ตามแนวแกน z

ซึ่งสามารถอธิบายได้ดัง Figure 1



Cylindrical coordinates
 (r, θ, z)
 $(r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi)$

Figure 1: จุด P ในระบบพิกัดทรงกระบอก. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 832)

โดยปกติ เราทราบว่าผิวของสมการ

$$x = x_0, \quad y = y_0 \quad \text{และ} \quad z = z_0$$

โดยที่ x_0, y_0 และ z_0 เป็นค่าคงตัว เป็นระนาบที่ขนานกับระนาบ yz, xz และ xy ตามลำดับ ดัง Figure 2

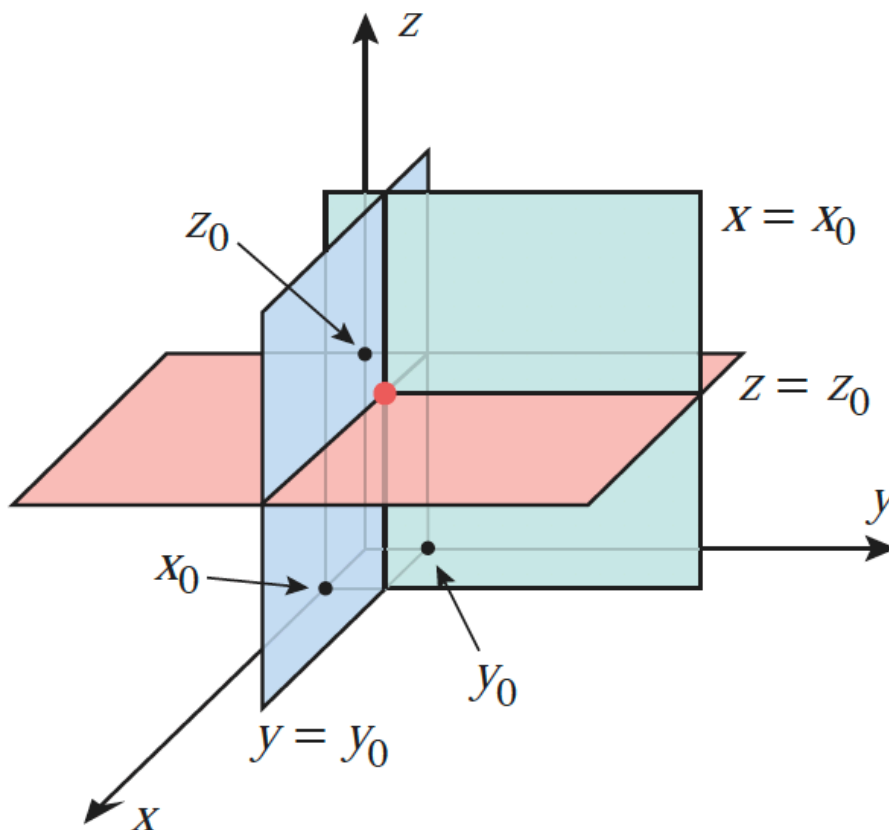


Figure 2: ผิวของสมการ $x = x_0, y = y_0, z = z_0$. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 832)

อย่างไรก็ตาม ในระบบพิกัดทรงกระบอก ผิวของสมการ

$$r = r_0, \quad \theta = \theta_0 \quad \text{และ} \quad z = z_0$$

โดยที่ $r_0 \geq 0, \theta \in [0, 2\pi)$ และ $z_0 \in \mathbb{R}$ เป็นค่าคงตัว เป็นดัง Figure 3

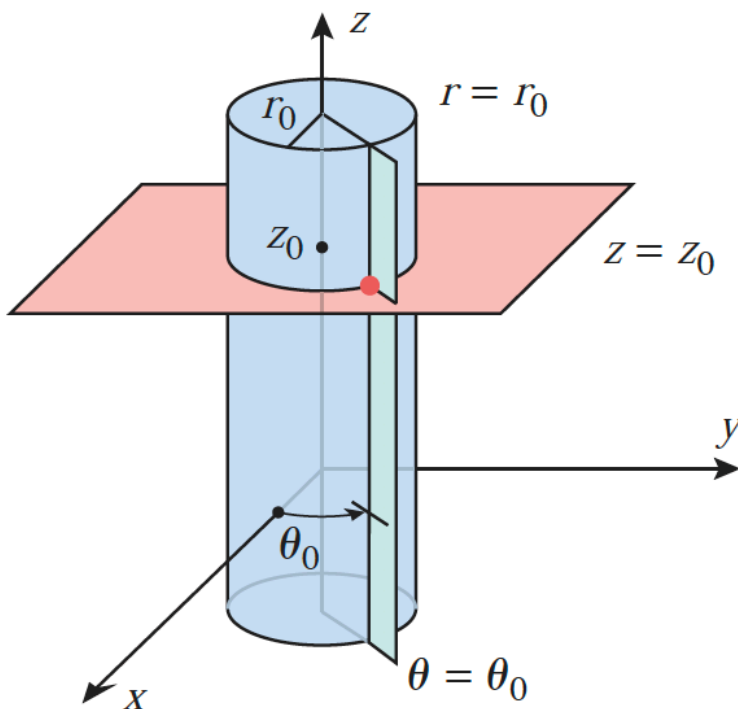


Figure 3: ผิวของสมการ $r = r_0, \theta = \theta_0, z = z_0$. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 833)

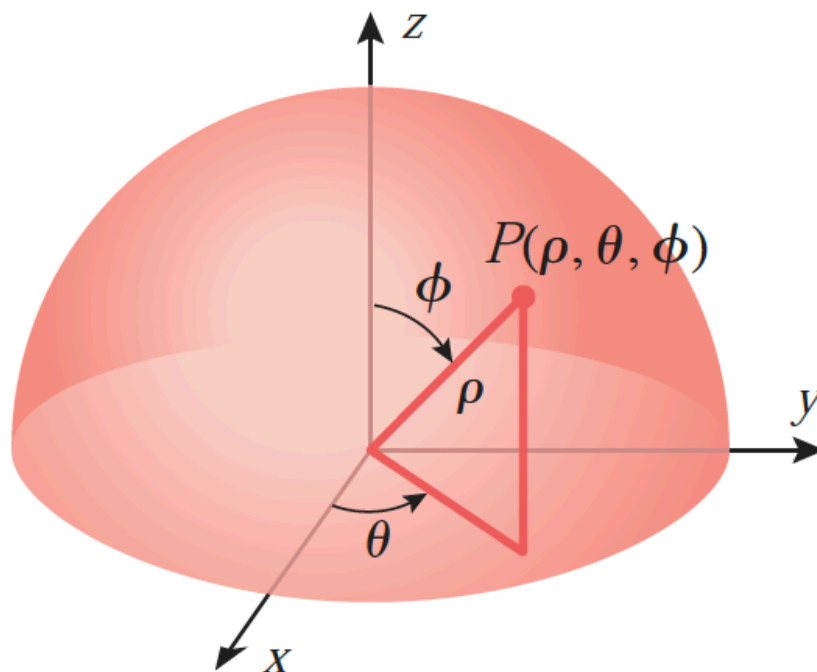
หมายเหตุ 1. จากผิวของสมการ $r = r_0, \theta = \theta_0$ และ $z = z_0$ สามารถสรุปลักษณะได้ดังนี้

- i) ผิว $r = r_0$ เป็นผิวทรงกระบอกตั้งตรง รัศมี r_0 และจุดศูนย์กลางเป็นแกน z
- ii) ผิว $\theta = \theta_0$ เป็นครึ่งระนาบตั้งตรงตามแนวแกน z และทำมุม θ_0 กับฝั่งบวกของแกน x
- iii) ผิว $z = z_0$ เป็นระนาบขนานกับระนาบ xy

บทนิยาม 2. ให้ P เป็นจุดในระบบพิกัดทรงกลม (spherical coordinate system) แล้ว P มีพิกัดในรูป (ρ, θ, ϕ) โดยที่

- i) $\rho \geq 0$ เป็นระยะห่างของจุด P วัดจากจุดกำเนิด O
- ii) $\theta \in [0, 2\pi)$ เป็นมุมที่วัดจากฝั่งบวกของแกน x ไปยังตำแหน่งของภาพฉาย (projection) ของจุด P บนระนาบ xy
- iii) $\phi \in [0, \pi]$ เป็นมุมที่วัดจากฝั่งบวกของแกน z ไปยังส่วนของเส้นตรง OP

ซึ่งสามารถอธิบายได้ดัง Figure 4



Spherical coordinates
 (ρ, θ, ϕ)
 $(\rho \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi)$

Figure 4: จุด P ในระบบพิกัดทรงกลม. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 832)

ในระบบพิกัดทรงกลม ผิวของสมการ

$$\rho = \rho_0, \quad \theta = \theta_0 \quad \text{และ} \quad \phi = \phi_0$$

โดยที่ $\rho_0 \geq 0, \theta \in [0, 2\pi)$ และ $\phi \in [0, \pi]$ เป็นค่าคงตัว เป็นดัง Figure 5

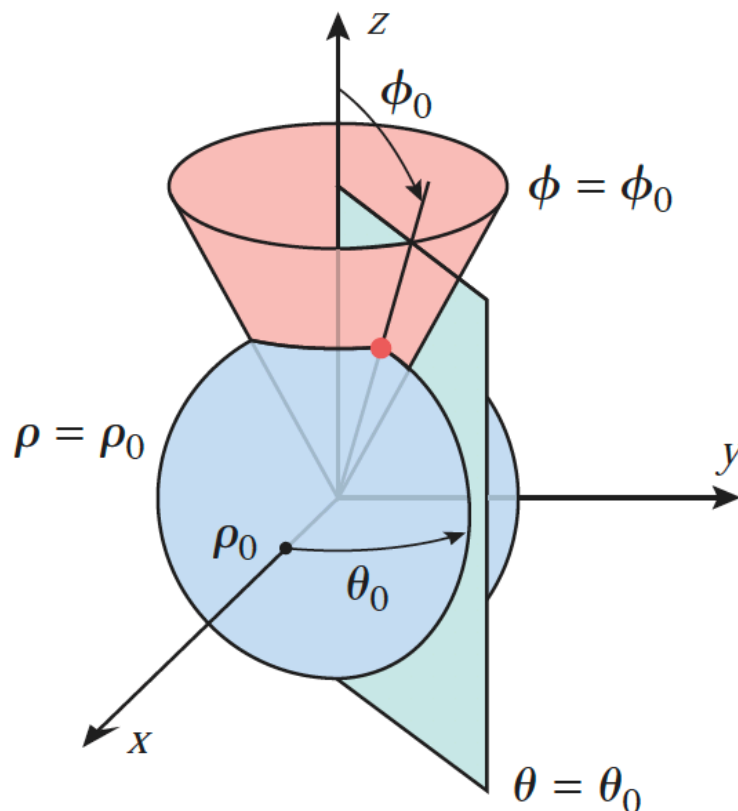


Figure 5: ผิวของสมการ $\rho = \rho_0, \theta = \theta_0, \phi = \phi_0$. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 833)

หมายเหตุ 2. จากผิวของสมการ $\rho = \rho_0, \theta = \theta_0$ และ $\phi = \phi_0$ สามารถสรุปลักษณะได้ดังนี้

- i) ผิว $\rho = \rho_0$ เป็นผิวทรงกลมที่มีรัศมี ρ_0 และจุดศูนย์กลางเป็นจุดกำเนิด
- ii) ผิว $\theta = \theta_0$ เป็นครึ่งระนาบที่ตั้งตรงตามแนวแกน z และทำมุม θ_0 กับฝั่งบวกของแกน x

iii) ผิว $\phi = \phi_0$ แบ่งเป็นหลายกรณี ดังนี้

ถ้า $\phi_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ แล้วผิวเป็นกรวยหงายที่ผิวกรวยทำมุม ϕ_0 กับฝั่งบวกของแกน z

ถ้า $\phi_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ แล้วผิวเป็นกรวยคว่ำที่ผิวกรวยทำมุม ϕ_0 กับฝั่งบวกของแกน z

ถ้า $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$ แล้วผิวเป็น.....

ถ้า $\phi_0 = 0$ แล้วผิวเป็น.....

ถ้า $\phi_0 = \pi$ แล้วผิวเป็น.....

พิจารณาระบบพิกัดทรงกระบอก ระบบพิกัดทรงกลม และระบบพิกัดฉากบนระนาบ xy โดยที่จุดกำเนิดของทั้งสองระบบเป็นจุดเดียวกัน จะพบว่าระบบพิกัดต่าง ๆ มีความสัมพันธ์กันดังนี้

จาก	เป็น	สูตร	ข้อจำกัด
(r, θ, z)	(x, y, z)	$x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta$ $z = z$	$r \geq 0$ $\theta \in [0, 2\pi)$ $z \in \mathbb{R}$
(x, y, z)	(r, θ, z)	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\tan \theta = \frac{y}{x}$ $z = z$	
(ρ, θ, ϕ)	(x, y, z)	$x = \rho \sin \phi \cos \theta$ $y = \rho \sin \phi \sin \theta$ $z = \rho \cos \phi$	$\rho \geq 0$ $\theta \in [0, 2\pi)$ $\phi \in [0, \pi]$
(x, y, z)	(ρ, θ, ϕ)	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\tan \theta = \frac{y}{x}$ $\cos \phi = \frac{z}{\rho}$	

ตัวอย่าง 1. จงหาตำแหน่งในระบบพิกัดฉากของจุดในระบบพิกัดทรงกระบอกต่อไปนี้

1. $P(1, 0, 1)$

2. $Q(4, \frac{\pi}{6}, 3)$

ตัวอย่าง 2. จงหาตำแหน่งในระบบพิกัดทรงกระบอกของจุดในระบบพิกัดฉากต่อไปนี้

1. $P(1, -1, -1)$

2. $Q(4\sqrt{3}, 4, -4)$

ตัวอย่าง 3. จงหาตำแหน่งในระบบพิกัดฉากของจุดในระบบพิกัดทรงกลมต่อไปนี้

1. $P(1, 0, \pi)$

2. $Q(5, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$

ตัวอย่าง 4. จงหาตำแหน่งในระบบพิกัดทรงกลมของจุดในระบบพิกัดฉากต่อไปนี้

1. $P(1,0,0)$

2. $Q(1,\sqrt{3},-2)$

ตัวอย่าง 5. จงหาสมการในระบบพิกัดฉากของผิวที่มีสมการในระบบพิกัดทรงกระบอกต่อไปนี

1. $z = 2 \cos \theta$

2. $r^2 + z^2 = r^2 \cos \theta \sin \theta$

ตัวอย่าง 6. จงหาสมการในระบบพิกัดฉากของผิวที่มีสมการในระบบพิกัดทรงกลมต่อไป

1. $\rho = 2 \cos \phi$

2. $\rho = 6 \sin \phi \sin \theta$

3. $\rho \sin \phi = 4 \cos \theta$

ตัวอย่าง 7. จงหาสมการในระบบพิกัดทรงกระบอกและระบบพิกัดทรงกลมของผิวที่มีสมการในระบบพิกัดฉากต่อไปนี้

1. $x + 2y + 3z = 1$

2. $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

3. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$