# Vectors and Parametric Curves in 3D-Space



**แบบฝึกหัด:**

**ABD12** : Section 12.1 : 3, 4, 6, 8, 11-14, 15(b), 16(b), 18, 20, 27-30, 31, 33, 34, 39, 41

**พิจารณาเวกเตอร์ $\mathbf{v}$ ในระบบพิกัดฉากที่มีจุดเริ่มต้น (initial point) เป็นจุดกำเนิดในระบบพิกัดฉาก และ จุดปลาย (terminal point) เป็นจุด $(v_1, v_2)$ ในปริภูมิ 2 มิติหรือจุด $(v_1, v_2, v_3)$ ในปริภูมิ 3 มิติ เราจะเขียนแทน $\mathbf{v}$ ด้วย**

$$\mathbf{v} := \langle v_1, v_2 \rangle \qquad \text{หรือ} \qquad \mathbf{v} := \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

**และเรียก $v_1, v_2, v_3$ ว่า ส่วนประกอบ (component) ของ $\mathbf{v}$ ในที่นี้ เราเขียนแทนเวกเตอร์ศูนย์ในปริภูมิ 2 มิติ/3 มิติ ด้วย**

$$\mathbf{0} := \langle 0, 0 \rangle \qquad \text{หรือ} \qquad \mathbf{0} := \langle 0, 0, 0 \rangle$$

**ถ้าไม่มีหมายเหตุเพิ่มเติม ขอตกลงว่าบทนิยามและทฤษฎีบทในหัวข้อเป็นจริงสำหรับปริภูมิ 2 มิติและ 3 มิติ และเพื่อความกระชับจะอธิบายเฉพาะปริภูมิ 3 มิติเท่านั้น**

**บทนิยาม 1.** ให้ $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ และ $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ และ $k$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ

1. $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ ก็ต่อเมื่อ $u_i = v_i, i = 1, 2, 3$
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} := \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3 \rangle$
3. $\mathbf{u} - \mathbf{v} := \langle u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3 \rangle$
4. $k\mathbf{u} := \langle ku_1, ku_2, ku_3 \rangle$

ต่อไปนี้เป็นสมบัติที่สำคัญของเวกเตอร์

**ทฤษฎีบท 1.** ให้ $\mathbf{u},\mathbf{v}$ และ $\mathbf{w}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติและ $k,l$ เป็นค่าคงตัว

1. $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$
2. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$
3. $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$
4. $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$
5. $k(l\mathbf{u})=(kl)\mathbf{u}$
6. $k(\mathbf{u}+\mathbf{v})=k\mathbf{u}+k\mathbf{v}$
7. $(k+l)\mathbf{u}=k\mathbf{u}+l\mathbf{u}$
8. $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

บางครั้งเวกเตอร์อาจไม่ได้เริ่มต้นที่จุดกำเนิดในระบบพิกัดฉากดังบทนิยามต่อไปนี้

**บทนิยาม 2.** ให้ $P_1(x_1,y_1,z_1)$ และ $P_2(x_2,y_2,z_2)$ เป็นจุดในปริภูมิ 3 มิติ เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่ $P_1$ และจุดปลายที่ $P_2$ เขียนแทนด้วย $\overrightarrow{P_1P_2}$ และนิยามโดย

$$\overrightarrow{P_1P_2}:=\langle x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\rangle$$

บทนิยาม 3. ให้ $\mathbf{v}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ เราจะเรียกระยะทางจากจุดกำเนิดไปยังจุดปลายของเวกเตอร์ $\mathbf{v}$ ว่า ความยาว (length) หรือ นอร์ม (norm) หรือ ขนาด (magnitude) ของ $\mathbf{v}$ และเขียนแทนด้วย $\|\mathbf{v}\|$ นั่นคือ ถ้า $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ แล้ว

$$\|\mathbf{v}\| := \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

ตัวอย่าง 1. จงหาขนาดของเวกเตอร์ต่อไปนี้

1. $\mathbf{v} = \langle 1, 2, 3\rangle$
2. $\mathbf{u} = \langle 2, 4, 6\rangle$ $= 2 < 1, 2, 3 >$
3. $\mathbf{w} = \langle 0, -1, 2\rangle$
4. $\mathbf{x} = \langle 0, 2, -4\rangle$ $= (-2) < 0, -1, 2 >$

① $\|v\| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

② $\|u\| = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$

③ $\|w\| = \sqrt{5}$

④ $\|x\| = 2\sqrt{5}$

จากตัวอย่างข้างต้น จะพบว่า สำหรับเวกเตอร์ $\mathbf{v}$ ใด ๆ และค่าคงตัว $k$ ใด ๆ ขนาดของเวกเตอร์ $k\mathbf{v}$ เท่ากับขนาดของเวกเตอร์ $\mathbf{v}$ คูณกับ $|k|$ เสมอ นั่นคือ

$$\|k\mathbf{v}\| = |k|\|\mathbf{v}\|$$

**บทนิยาม 4.** เราเรียกเวกเตอร์ $\mathbf{v}$ ว่า เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (unit vector) ถ้า $\|\mathbf{v}\| = 1$ และเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแนวแกน $x, y$ และ $z$ เขียนแทนด้วย

$$\mathbf{i} := \langle 1,0,0\rangle, \mathbf{j} := \langle 0,1,0\rangle \text{ และ } \mathbf{k} := \langle 0,0,1\rangle$$

**หมายเหตุ 1.** ทุกเวกเตอร์ $\mathbf{v}$ สามารถเขียนในรูปของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ และ $\mathbf{k}$ ได้เพียงรูปแบบเดียวเสมอ นั่นคือ

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle = \langle v_1, 0, 0\rangle + \langle 0, v_2, 0\rangle + \langle 0, 0, v_3\rangle$$

$$= v_1\langle 1,0,0\rangle + v_2\langle 0,1,0\rangle + v_3\langle 0,0,1\rangle$$

$$= v_1 i + v_2 j + v_3 k$$

**ตัวอย่าง 2.** จงเขียนเวกเตอร์ต่อไปนี้ในรูปเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

1. $\langle 1,-2,3\rangle = i - 2j + 3k$
2. $\langle 0,4,0\rangle = 0i + 4j + 0k = 4j$
3. $\langle 0,0,0\rangle = 0i + 0j + 0k = 0$

**บทนิยาม 5.** ให้ $\mathbf{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ เราจะกล่าวว่าเวกเตอร์ $\mathbf{u}$ เป็น เวกเตอร์หนึ่งหน่วยทิศทางเดียวกับ $\mathbf{v}$ ถ้า $\mathbf{u}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย และมีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\mathbf{v}$

**หมายเหตุ 2.** โดยปกติแล้ว ถ้ามีเวกเตอร์ $\mathbf{v}$ ที่ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ เราสามารถหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยทิศทางเดียวกับ $\mathbf{v}$ ได้ คือ

$$u = \frac{v}{\|v\|}$$

ตรวจ $\|u\| = \left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = \frac{1}{\cancel{\|v\|}} \cdot \cancel{\|v\|} = 1$

normalize

ตัวอย่าง 3. จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยทิศทางเดียวกับ $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

วิธีทำ. พิจารณา $\|v\| = \sqrt{3^2+2^2+1^2} = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$

ดังนั้น เวกเตอร์หนึ่งหน่วยทิศทางเดียวกับ v คือ

$$\frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3i+2j+k) = \frac{3}{\sqrt{14}}i + \frac{2}{\sqrt{14}}j + \frac{1}{\sqrt{14}}k$$

หมายเหตุ 3. ถ้า $\mathbf{u}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย เราสามารถหาเวกเตอร์ $\mathbf{v}$ ที่มีทิศทางเดียวกับ $\mathbf{u}$ และมีขนาด $\|\mathbf{v}\|$ ตามที่กำหนดให้ได้โดย

$$\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|\mathbf{u}$$

ตัวอย่าง 4. จงหาเวกเตอร์ $\mathbf{v}$ ที่มีขนาด ~~17~~ 34 หน่วย และอยู่บนส่วนของเส้นตรงเชื่อมจากจุด $A(0,1,2)$ ไปยัง $B(3,-1,0)$

วิธีทำ. ① หาเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB} = \langle 3,-1,0\rangle - \langle 0,1,2\rangle = \langle 3,-2,-2\rangle$$

จะได้ $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2+(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}$

ดังนั้น เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{AB}$ คือ

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{1}{\sqrt{17}}\langle 3,-2,-2\rangle = \frac{3}{\sqrt{17}}i - \frac{2}{\sqrt{17}}j - \frac{2}{\sqrt{17}}k$$

$2\times 17 = 2\times\sqrt{17}\times\sqrt{17}$

ดังนั้น

$$v = \|v\|\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}\right) = 34\left(\frac{3}{\sqrt{17}}i - \frac{2}{\sqrt{17}}j - \frac{2}{\sqrt{17}}k\right)$$

$$= 6\sqrt{17}i - 4\sqrt{17}j - 4\sqrt{17}k$$

#

**บทนิยาม 6.** ให้ $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ และ $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ ผลคูณจุด (dot product) ของ $\mathbf{u}$ และ $\mathbf{v}$ เขียนแทนด้วย $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ และนิยามโดย

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

**ตัวอย่าง 5.** จงผลคูณจุดของเวกเตอร์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. $\langle 1, 0, 1 \rangle$ และ $\langle 0, -1, 0 \rangle$
2. $3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ และ $\mathbf{i} - \mathbf{k}$

① 0

② $3 + 0 + 2 = 5$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้รวบรวมสมบัติที่สำคัญของผลคูณจุด

**ทฤษฎีบท 2.** ให้ $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ และ $\mathbf{w}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติและ $k$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
2. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
3. $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (k\mathbf{v})$
4. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{v} = 0$
5. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$

จากทฤษฎีบทข้างต้น จะพบว่าเราสามารถคำนวณขนาดของเวกเตอร์โดยใช้ผลคูณจุดได้โดย

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$$

บทนิยาม 7. ให้ $\mathbf{u}$ และ $\mathbf{v}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติที่มีจุดเริ่มต้นเดียวกัน เราจะเรียก $\theta$ ว่าเป็นมุมระหว่าง $\mathbf{u}$ และ $\mathbf{v}$ ถ้า $\theta$ ที่เกิดจากเวกเตอร์ $\mathbf{u}$ และ $\mathbf{v}$ ซึ่งสอดคล้องกับ $0 \leq \theta \leq \pi$

ทฤษฎีบท 3. ให้ $\mathbf{u}$ และ $\mathbf{v}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติที่ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ ถ้า $\theta$ เป็นมุมระหว่าง $\mathbf{u}$ และ $\mathbf{v}$ แล้ว

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$$

หมายเหตุ 4. จากทฤษฎีบทข้างต้นจะพบว่า มุมระหว่างเวกเตอร์ส่งผลกับเครื่องหมายของผลคูณจุดดังนี้

ถ้า $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ แล้ว

$$\cos\theta \geq 0 \Rightarrow \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|} \geq 0 \Rightarrow u \cdot v \geq 0$$

ถ้า $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ แล้ว

$$\cos\theta < 0 \Rightarrow \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} < 0 \Rightarrow u \cdot v < 0$$

**บทนิยาม 8.** ให้ $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ และ $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ ผลคูณไขว้ (cross product) ของ $\mathbf{u}$ และ $\mathbf{v}$ เขียนแทนด้วย $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ และนิยามโดย

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} := \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

**หมายเหตุ 5.** เพื่อความสะดวกในการจำสูตร เราอาจเขียนผลคูณไขว้ของ $\mathbf{u}$ และ $\mathbf{v}$ ได้เป็น

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} := \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

**ตัวอย่าง 6.** ให้ $\mathbf{u} = \langle 1, -2, 2 \rangle$ และ $\mathbf{v} = \langle 2, 0, -1 \rangle$ จงหาค่าของ $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ และ $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$

1. $u \times v = 2i + 5j + 4k$

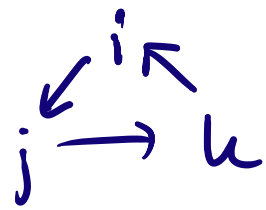
2. $v \times u = -2i - 5j - 4k$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้รวบรวมสมบัติสำคัญของผลคูณไขว้

**ทฤษฎีบท 4.** ให้ $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ และ $\mathbf{w}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติและ $k$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ

1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$
2. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$
3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$
4. $k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (k\mathbf{v})$
5. $\mathbf{0} \times \mathbf{v} = \mathbf{0} = \mathbf{v} \times \mathbf{0}$
6. $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$

ตัวอย่าง 7. จงแสดงว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริง




1. $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$
2. $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$
3. $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$
4. $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$
5. $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$
6. $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$

**ทฤษฎีบท 5.** ให้ $\mathbf{u}$ และ $\mathbf{v}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ แล้ว

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = 0 = \mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$$

**ตัวอย่าง 8.** จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\langle 2,-1,3\rangle$ และ $\langle -1,2,1\rangle$

$-7i-5j+3k$

ต่อไปเราจะศึกษาฟังก์ชันค่าเวกเตอร์และกราฟของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

**บทนิยาม 9.** ให้ $f(t), g(t)$ และ $h(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปร $t$ พิจารณาสมการอิงตัวแปรเสริม

$$x = f(t), y = g(t) \text{ และ } z = h(t)$$

ซึ่งก่อกำเนิดเส้นโค้ง (curve) ในปริภูมิสามมิติที่มีรอยเดิน (trace) เปลี่ยนแปลงไปตามทิศทางที่ $t$ เพิ่มขึ้น เราจะเรียก

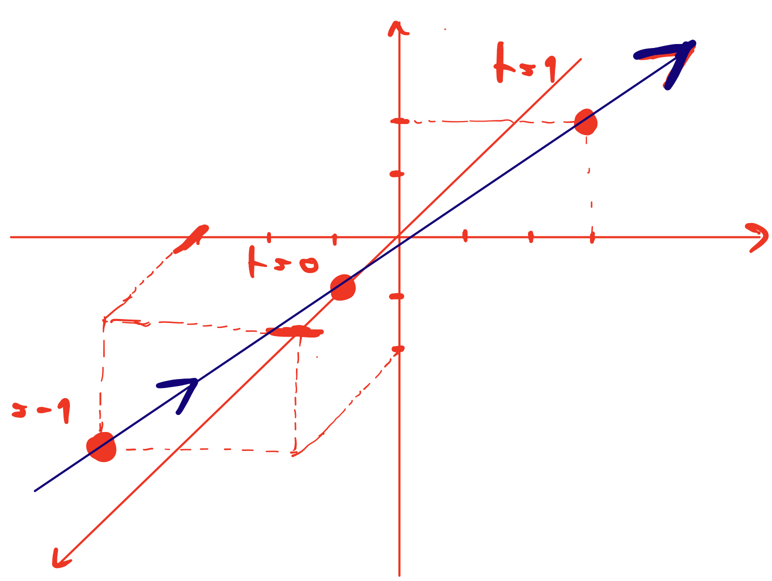
- ทิศทาง (direction) ที่ค่า $t$ เพิ่มขึ้น ว่า การกำหนดทิศทาง (orientation) หรือ ทิศทางการเพิ่มของตัวแปรเสริม (direction of increasing parameter)
- เส้นโค้งที่กำหนดโดยสมการอิงตัวแปรเสริมข้างต้นที่มีการกำหนดทิศทาง ว่า กราฟ (graph) ของสมการอิงตัวแปรเสริม หรือ เส้นโค้งอิงตัวแปรเสริม (parametric curve)

**หมายเหตุ 6.** ในหัวข้อนี้ ถ้าไม่มีการระบุเพิ่มเติม เราจะสมมติให้ $t$ อยู่ในช่วง $(-\infty, +\infty)$

**ตัวอย่าง 9.** จงเขียนกราฟของสมการอิงตัวแปรเสริม

$$x = 1 - t, \quad y = 3t \quad \text{และ} \quad z = 2t$$

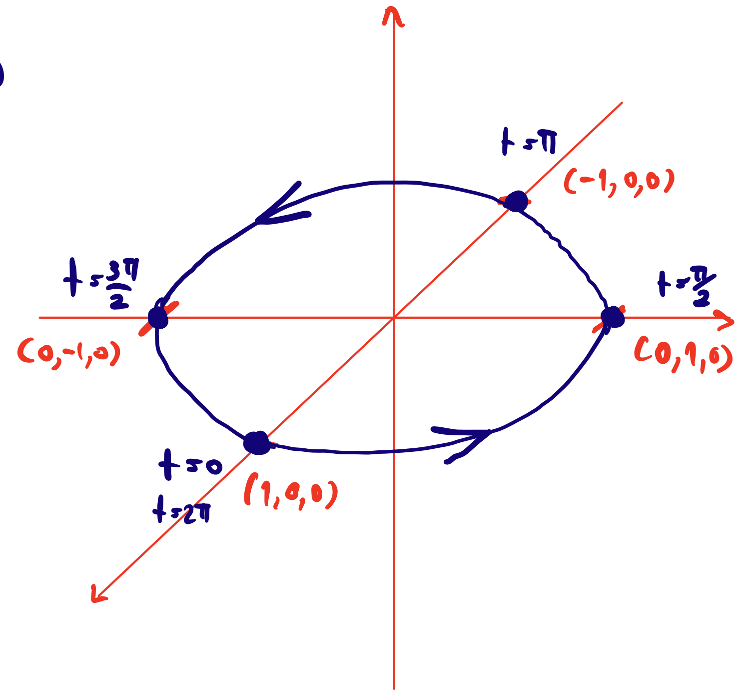
| $t$ | $x = 1-t$ | $y = 3t$ | $z = 2t$ |
|---|---|---|---|
| $-1$ | $2$ | $-3$ | $-2$ |
| $0$ | $1$ | $0$ | $0$ |
| $1$ | $0$ | $3$ | $2$ |



ตัวอย่าง 10. จงเขียนกราฟของสมการอิงตัวแปรเสริม

$$x = \cos t, \quad y = \sin t \quad \text{และ} \quad z = 0$$

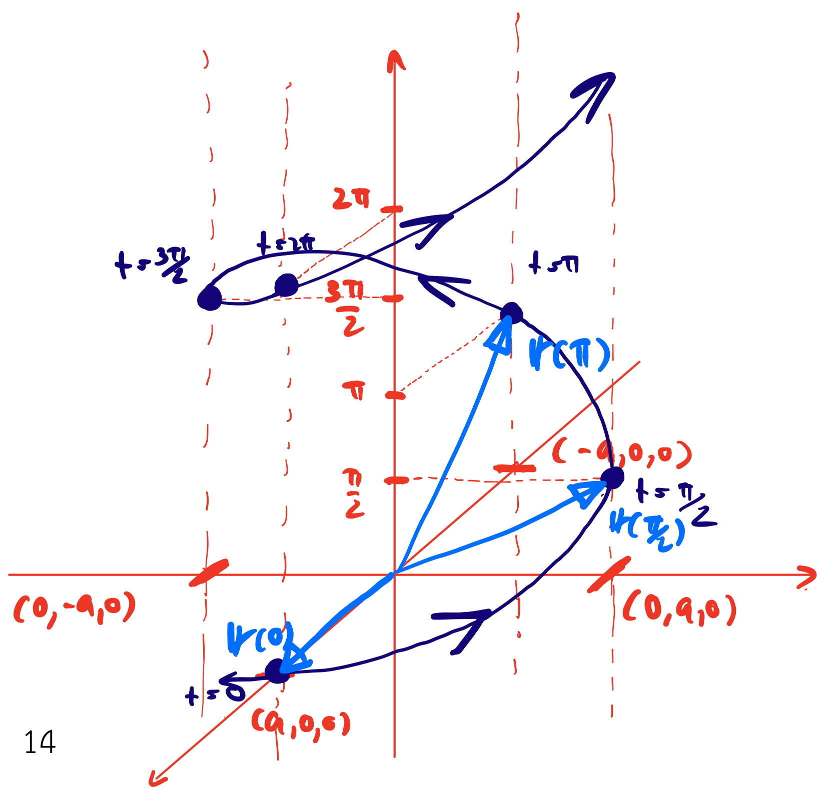
| $t$ | $x = \cos t$ | $y = \sin t$ | $z = 0$ |
|---|---|---|---|
| $0$ | $1$ | $0$ | $0$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | $0$ | $1$ | $0$ |
| $\pi$ | $-1$ | $0$ | $0$ |
| $\frac{3\pi}{2}$ | $0$ | $-1$ | $0$ |
| $2\pi$ | $1$ | $0$ | $0$ |




ตัวอย่าง 11. จงเขียนกราฟของเกลียวเชิงวงกลม (circular helix) ที่กำหนดโดยสมการอิงตัวแปรเสริม

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t \quad \text{และ} \quad z = t$$

| $t$ | $x = a\cos t$ | $y = a\sin t$ | $z = t$ |
|---|---|---|---|
| $0$ | $a$ | $0$ | $0$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | $0$ | $a$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| $\pi$ | $-a$ | $0$ | $\pi$ |
| $\frac{3\pi}{2}$ | $0$ | $-a$ | $\frac{3\pi}{2}$ |
| $2\pi$ | $a$ | $0$ | $2\pi$ |



สังเกตว่าเกลียวเชิงวงกลมที่นิยามในตัวอย่างข้างต้นเป็นเซตของจุดในปริภูมิสามมิติที่อยู่ในรูป $(a\cos t, a\sin t, t)$ สำหรับทุก $t \in (\infty, +\infty)$ ดังนั้น ถ้าเราให้จุดเหล่านี้เป็นจุดปลาย ของเวกเตอร์ $\mathbf{r}$ ที่จุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดกำเนิดจะได้ว่า

$$\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle = \langle a\cos t, a\sin t, t \rangle = a\cos t\mathbf{i} + a\sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

นั่นคือ $\mathbf{r}$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร $t$ และเนื่องจากค่าฟังก์ชัน $\mathbf{r}(t)$ ที่ได้เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ เราจึงเรียก $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ว่า ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ของตัวแปรจริง (vector-valued function of a real variable) หรือ ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ (vector-valued function)

นอกจากนี้ ถ้า $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ของตัวแปรจริง $t$ จะได้ว่า $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ สามารถเขียนอยู่ในรูปของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ และ $\mathbf{k}$ ได้เสมอ นั่นคือ จะมีฟังก์ชัน $x(t), y(t)$ และ $z(t)$ ที่

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

และเราจะเรียกฟังก์ชัน $x(t), y(t)$ และ $z(t)$ ว่า ฟังก์ชันส่วนประกอบ (component function) หรือ ส่วนประกอบ (component) ของ $\mathbf{r}$

บทนิยาม 10. ให้ $\mathbf{r}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ

- เราจะเรียกเซตของตัวแปรจริง $t$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $\mathbf{r}(t)$ นิยามได้ ว่า โดเมน (domain) ของ $\mathbf{r}$
- ถ้า $\mathbf{r}$ อยู่ในรูปของฟังก์ชันส่วนประกอบ

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

แล้ว โดเมนของ $\mathbf{r}(t)$ คืออินเตอร์เซกชันของโดเมนของฟังก์ชันส่วนประกอบทั้งหมด และเราจะเรียกโดเมนของ $\mathbf{r}(t)$ ในกรณีนี้ว่า โดเมนธรรมชาติ (natural domain)

$dom(r(t)) = dom(x(t)) \cap dom(y(t)) \cap dom(z(t))$

ตัวอย่าง 12. จงหาโดเมนของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t) = \underbrace{\ln t}_{x(t)}\mathbf{i} + \underbrace{\sqrt{1-t}}_{y(t)}\mathbf{j} + \underbrace{t^4}_{z(t)}\mathbf{k}$

พิจารณา $\text{dom}(x(t)) = \text{dom}(\ln t) = (0, +\infty)$

$\text{dom}(y(t)) = \text{dom}(\sqrt{1-t}) = (-\infty, 1]$

$1-t \geq 0 \Rightarrow t \leq 1$

$\text{dom}(z(t)) = \text{dom}(t^4) = (-\infty, \infty)$

ดังนั้น $\text{dom}(\mathbf{r}(t)) = \text{dom}(x(t)) \cap \text{dom}(y(t)) \cap \text{dom}(z(t))$

$= (0, +\infty) \cap (-\infty, 1] \cap (-\infty, \infty)$

$= (0, 1]$

ตัวอย่าง 13. จงหาโดเมนของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t) = \ln|t-1|\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + \sqrt{t}\mathbf{k}$

ฝาก! $\text{dom}(\mathbf{r}(t)) = [0, 1) \cup (1, +\infty)$

**บทนิยาม 11.** ให้ $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ กราฟ (graph) ของ $\mathbf{r}(t)$ คือ กราฟของสมการอิงตัวแปรเสริม $x(t), y(t)$ และ $z(t)$ ที่เป็นฟังก์ชันส่วนประกอบของ $\mathbf{r}(t)$

ตัวอย่างเช่น ถ้า $\mathbf{r}(t) = (1-t)\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$ แล้วกราฟของ $\mathbf{r}(t)$ คือ กราฟของสมการอิงตัวแปรเสริม

$$x = 1-t, \quad y = 3t \quad \text{และ} \quad z = 2t$$

**ตัวอย่าง 14.** จงหาโดเมนและเขียนกราฟของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

$$\mathbf{r}(t) = (2+3t)\mathbf{i} + (-1+t)\mathbf{j} - 2t\mathbf{k}$$

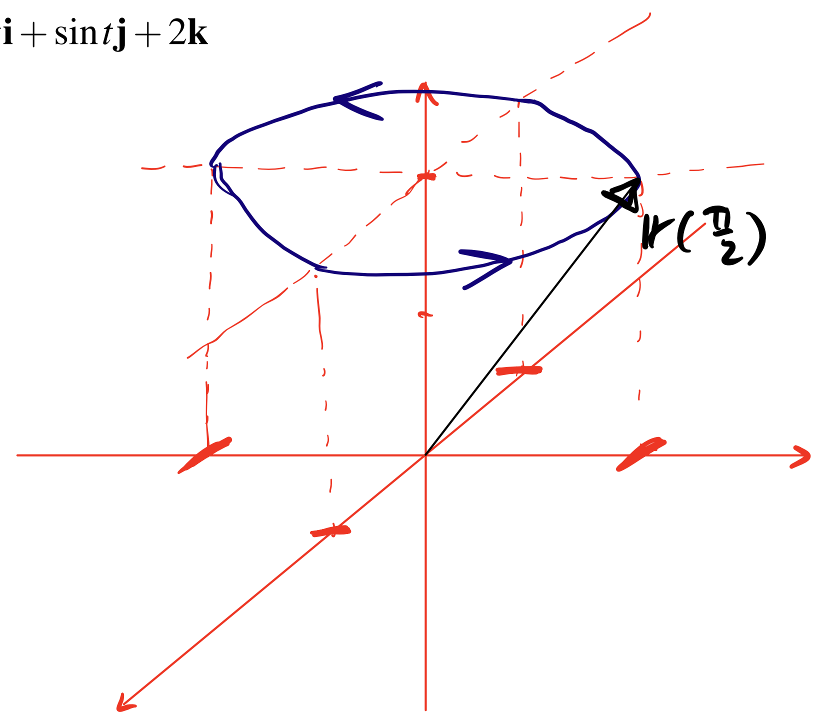
**บทนิยาม 12.** ให้ $C$ เป็นเส้นโค้งเป็นกราฟของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

เราจะเรียก เวกเตอร์ $\mathbf{r}(t)$ ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิดและจุดปลายอยู่บนเส้นโค้ง $C$ ณ $t$ ใด ๆ ว่า เวกเตอร์รัศมี (radius vector) หรือ เวกเตอร์ตำแหน่ง (position vector)

**ตัวอย่าง 15.** จงเขียนกราฟและหาเวกเตอร์ตำแหน่งเมื่อ $t = \pi/2$ ของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$



หากเรายังจำได้ เราได้ศึกษาสมการของเส้นตรงที่ผ่านสองจุดใด ๆ ในปริภูมิสองมิติมาแล้ว ในทำนองเดียวกัน ถ้า $\mathbf{r}_0$ และ $\mathbf{r}_1$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด แล้ว สมการในรูปเวกเตอร์ของเส้นตรงที่ผ่านจุดปลายของ $\mathbf{r}_0$ และ $\mathbf{r}_1$ คือ

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \quad \text{หรือ} \quad \mathbf{r} = (1-t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \quad \forall t \in (-\infty, +\infty)$$

และถ้าเราจำกัดขอบเขตของ $t$ เป็น $[0,1]$ แล้ว ค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}$ จะอยู่ระหว่าง $\mathbf{r}_0$ และ $\mathbf{r}_1$ และได้สมการในรูปเวกเตอร์ของจุดใด ๆ ที่อยู่บนส่วนเส้นตรงระหว่าง $\mathbf{r}_0$ และ $\mathbf{r}_1$ คือ

$$\mathbf{r} = (1-t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \quad \forall t \in [0,1]$$

**ตัวอย่าง 16.** จงหาสมการของส่วนของเส้นตรงที่อยู่ระหว่างเวกเตอร์ $\mathbf{r}_0 = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ และ $\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$