SC 402 202 Calculus for Engineering III 1/2566

Limits and Continuity

กลุ่ม 01 Chapter 3 Vector-Valued Functions

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาสมบัติพื้นฐานทางพีชคณิตของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์และแคลคูลัสพื้นฐานของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

บทนิยาม 1. ให้ $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{s}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ และ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง สำหรับทุก $t \in \mathbb{R}$ เรานิยามการดำเนินการของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ดังนี้

1. $(\mathbf{r} \pm \mathbf{s})(t) = \mathbf{r}(t) \pm \mathbf{s}(t)$
2. $(f\mathbf{r})(t) = f(t)\mathbf{r}(t)$
3. $(\mathbf{r} \circ f)(t) = \mathbf{r}(f(t))$
4. $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s})(t) = \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{s}(t)$
5. $(\mathbf{r} \times \mathbf{s})(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{s}(t)$

$\cancel{(f \circ \mathbf{r})(t) \ ? \ = f(\underbrace{\mathbf{r}(t)}_{\in \mathbb{R}^3})}$

ตัวอย่าง 1. กำหนดให้ $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \sqrt{t}\mathbf{k}$, $\mathbf{s}(t) = \ln t\mathbf{i} + (1+t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ และ $f(t) = t - 1$ จงหาค่าของการดำเนินการของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ดังนี้

1. $(\mathbf{r} \pm \mathbf{s})(t)$

$$(\mathbf{r} + \mathbf{s})(t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{s}(t)$$
$$= (t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \sqrt{t}\mathbf{k}) + (\ln t\,\mathbf{i} + (1+t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$$
$$= (t + \ln t)\mathbf{i} + (1 + t + t^2)\mathbf{j} + (2 + \sqrt{t})\mathbf{k}$$

2. $(f\mathbf{r})(t)$

$$(f\mathbf{r})(t) = f(t)\mathbf{r}(t)$$
$$= (t-1)\left(t\,i + t^2 j + \sqrt{t}\,k\right)$$
$$= (t^2-t)i + (t^3-t^2)j + (t^{3/2}-t^{1/2})k$$

3. $(\mathbf{r} \circ f)(t)$

$$(\mathbf{r} \circ f)(t) = \mathbf{r}(f(t))$$
$$= \mathbf{r}(t-1)$$
$$= (t-1)i + (t-1)^2 j + \sqrt{t-1}\,k$$

4. $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s})(t)$

Win!

5. $(\mathbf{r} \times \mathbf{s})(t)$

Win!

ในลำดับถัดไป เราจะศึกษาแนวคิดของลิมิตของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ เมื่อตัวแปรจริง t ลู่เข้าสู่ a ดังนี้

บทนิยาม 2. ให้ $a \in \mathbb{R}$ และ $\mathbf{r}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ที่นิยามสำหรับทุก t ที่อยู่ในช่วงที่บรรจุ a และ $\mathbf{L}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ เราจะกล่าวว่า $\mathbf{L}$ เป็นลิมิต (limit) ของ $\mathbf{r}(t)$ เมื่อ t ลู่เข้าสู่ a ถ้า

$$\lim_{t\to a} \|\mathbf{r}(t) - \mathbf{L}\| = 0$$

และเราจะเขียนแทนด้วย $\lim\limits_{t\to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{L}$

หมายเหตุ 1. ฟังก์ชัน $\mathbf{r}(t)$ ในนิยามข้างต้นนี้ไม่จำเป็นต้องหาค่าได้ที่ $t = a$

ทฤษฎีบท 1. ให้ $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์และ $a \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $\lim\limits_{t\to a} \mathbf{r}(t)$ หาค่าได้ ก็ต่อเมื่อ ลิมิตของฟังก์ชันส่วนประกอบ $\lim\limits_{t\to a} x(t), \lim\limits_{t\to a} y(t)$ และ $\lim\limits_{t\to a} z(t)$ หาค่าได้ นอกจากนี้ จะได้ว่า

$$\lim_{t\to a} \mathbf{r}(t) = \lim_{t\to a} x(t)\mathbf{i} + \lim_{t\to a} y(t)\mathbf{j} + \lim_{t\to a} z(t)\mathbf{k}$$

ตัวอย่าง 2. กำหนดให้ $\mathbf{r}(t) = \underbrace{t^2}_{x(t)}\mathbf{i} + \underbrace{e^t}_{y(t)}\mathbf{j} - \underbrace{2cos\pi t}_{z(t)}\mathbf{k}$ จงหา $\lim\limits_{t\to 0} \mathbf{r}(t)$ (ถ้ามี)

วิธีทำ

$\lim\limits_{t\to 0} x(t) = \lim\limits_{t\to 0} t^2 = 0$: หาค่าได้

$\lim\limits_{t\to 0} y(t) = \lim\limits_{t\to 0} e^t = e^0 = 1$: หาค่าได้

$\lim\limits_{t\to 0} z(t) = \lim\limits_{t\to 0} (-2\cos \pi t) = -2\cos 0 = (-2)(1) = -2$ หาค่าได้

ดังนั้น $\lim\limits_{t\to 0} \mathbf{r}(t)$ หาค่าได้

และ $\lim\limits_{t\to 0} \mathbf{r}(t) = 0i + 1j - 2k$

$= j - 2k$

ตัวอย่าง 3. กำหนดให้ $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + \frac{t}{\sin t}\mathbf{j} + \sqrt{t}\mathbf{k}$ จงหา $\lim_{t\to 0}\mathbf{r}(t)$ (ถ้ามี)

พิจารณา $\lim_{t\to0} x(t) = \lim_{t\to0} 2\cos t = 2\cos 0 = 2$: หาค่าได้

$\lim_{t\to0} y(t) = \lim_{t\to0} \frac{t}{\sin t} = \lim_{t\to0} \frac{1}{\cos t} = \frac{1}{\cos 0} = 1$: หาค่าได้

$\lim_{t\to0} z(t) = \lim_{t\to0} \sqrt{t} = \sqrt{0} = 0$: หาค่าได้

ดังนั้น $\lim_{t\to0} \mathbf{r}(t)$ หาค่าได้ และ

$\lim_{t\to0} \mathbf{r}(t) = 2i + 1j + 0k = 2i + j$ #

ต่อไปเป็นสมบัติทางพีชคณิตของลิมิตของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

ทฤษฎีบท 2. ให้ $\mathbf{r}(t), \mathbf{s}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง และ $a \in \mathbb{R}$ สมมติให้ $\lim_{t\to a}\mathbf{r}(t) = \mathbf{A}$, $\lim_{t\to a}\mathbf{s}(t) = \mathbf{B}$ และ $\lim_{t\to a} f(t) = c$ จะได้ว่า

1. $\lim_{t\to a}(\mathbf{r} \pm \mathbf{s})(t) = \mathbf{A} \pm \mathbf{B}$
2. $\lim_{t\to a}(f\mathbf{r})(t) = c\mathbf{A}$
3. $\lim_{t\to a}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s})(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$
4. $\lim_{t\to a}(\mathbf{r} \times \mathbf{s})(t) = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$

ตัวอย่าง 4. กำหนดให้ $\mathbf{r}(t) = \cos\pi t\mathbf{i} + 2\sin\pi t\mathbf{j} + 4t^2\mathbf{k}, \mathbf{s}(t) = t\mathbf{i} + t^3\mathbf{k}$ และ $f(t) = \frac{1}{t-1}$ จงหาค่าของลิมิตในแต่ละข้อต่อไปนี้ (ถ้ามี)

โดยที่ $a = 1$

1. $\lim_{t\to 1}(\mathbf{r} \pm \mathbf{s})(t) = 5k$

2. $\lim\limits_{t\to \underset{1}{a}}(f\mathbf{r})(t) = -2i+3k$

3. $\lim\limits_{t\to \underset{1}{a}}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{s})(t) = 3$

4. $\lim\limits_{t\to \underset{1}{a}}(\mathbf{r}\times\mathbf{s})(t) = 5j$

บทนิยาม 3. ให้ $\mathbf{r}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ และ $a \in \mathbb{R}$ เราจะกล่าวว่า $\mathbf{r}(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง (continuous function) ที่ $t = a$ ถ้า $\lim\limits_{t\to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a)$

ทฤษฎีบท 3. ให้ $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ และ $a \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $\mathbf{r}(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $t = a$ ก็ต่อเมื่อ ทุกฟังก์ชันส่วนประกอบ $x(t), y(t)$ และ $z(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $t = a$

ตัวอย่าง 5. จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t) = 5\mathbf{i} - \sqrt{3t+1}\,\mathbf{j} + e^{2t}\mathbf{k}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $t = 0$ หรือไม่

พิจารณา $x(t) = 5$; $\lim\limits_{t\to 0} x(t) = \lim\limits_{t\to 0} 5 = 5$ และ $x(0) = 5 \Rightarrow x(t)$: ต่อเนื่องที่ $t=0$

$y(t) = -\sqrt{3t+1}$; $\lim\limits_{t\to 0} y(t) = \lim\limits_{t\to 0} \left(-\sqrt{3t+1}\right) = -\sqrt{3\cdot 0+1} = -1$

และ $y(0) = -1 \Rightarrow y(t)$: ต่อเนื่องที่ $t=0$

และ $z(t) = e^{2t}$; $\lim\limits_{t\to 0} z(t) = \lim\limits_{t\to 0} e^{2t} = e^{0} = 1$ และ $z(0) = e^{0} = 1 \Rightarrow z(t)$: ต่อเนื่องที่ $t=0$

ดังนั้น $\mathbf{r}(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $t=0$

#

ตัวอย่าง 6. จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} - \frac{1}{t}\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $t = 0$ หรือไม่

พิจารณา $\lim\limits_{t\to 0} y(t) = \lim\limits_{t\to 0} \left(-\frac{1}{t}\right) = \,?$

และ $y(0) = -\frac{1}{0}\ ?$

$\Rightarrow y(t)$: ___ ที่ $t=0$

$\Rightarrow \mathbf{r}(t)$: ____ ที่ $t=0$

ตัวอย่าง 7. จงหาช่วงที่ทำให้ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} - \frac{1}{t}\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง