Unit Tangent, Normal and Binormal Vectors

แบบฝึกหัด:

ABD12 : Section 12.4 : 1, 2, 5,-12, 15-18, 19-20, 21, 22, 24

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาสมบัติพื้นฐานทางเรขาคณิตของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

หากเรายังจำได้ ถ้ามีเส้นโค้งปรับเรียบ C ที่เป็นกราฟของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t)$ แล้วจะได้ว่า $\mathbf{r}'(t)$ จะไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์และสัมผัสกับ C นอกจากนี้ทิศทางของ $\mathbf{r}'(t)$ เป็นทิศทางเดียวกันกับทิศทางการเพิ่มขึ้นของตัวแปรเสริม

บทนิยาม 1. ให้ C เป็นเส้นโค้งปรับเรียบที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t)$ บนช่วง I ใด ๆ เวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย (unit tangent vector) ที่สัมผัส C ณ จุด t เขียนแทนด้วย $\mathbf{T}(t)$ และกำหนดโดย

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

ตัวอย่าง 1. จงหาเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วยที่สัมผัสเส้นโค้ง C ที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$ ณ $t = 2$

ตัวอย่าง 2. จงหาเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วยที่สัมผัสเส้นโค้ง C ที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$$

ณ $t = t_0$

พิจารณาฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t)$ หากเรายังจำได้ ถ้าเราทราบว่า $\|\mathbf{r}(t)\|$ เป็นค่าคงตัว แล้ว $\mathbf{r}(t)$ และ $\mathbf{r}'(t)$ จะเป็นเวกเตอร์ตั้งฉากกัน

จากนิยามข้างต้น เราทราบว่า

$$\|\mathbf{T}(t)\| = \left\| \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \right\| = 1$$

ซึ่งเป็นค่าคงตัว จึงได้ว่า $\mathbf{T}(t)$ และ $\mathbf{T}'(t)$ เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกันด้วย นั่นคือ $\mathbf{T}'(t)$ ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสของ C ที่จุด t นั่นเอง และในที่นี้เราจะกล่าวว่า $\mathbf{T}'(t)$ เป็น แนวฉาก (normal) ของ C ณ จุด t

บทนิยาม 2. ให้ C เป็นเส้นโค้งปรับเรียบที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t)$ โดยที่ $\mathbf{T}'(t) \neq \mathbf{0}$ เวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วย (unit normal vector) ของ C ณ จุด t เขียนแทนด้วย $\mathbf{N}(t)$ และกำหนดโดย

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$$

ตัวอย่าง 3. กำหนดให้ $a > 0$ จงหาเวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วยของเส้นโค้ง C ที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\sin t\mathbf{j} + ct\mathbf{k}$ ณ $t = t_0$

บทนิยาม 3. ให้ C เป็นเส้นโค้งปรับเรียบที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t)$ โดยที่ $\mathbf{T}'(t) \neq \mathbf{0}$ เวกเตอร์คู่แนวฉากหนึ่งหน่วย (unit binormal vector) ของ C ณ จุด t เขียนแทนด้วย $\mathbf{B}(t)$ และกำหนดโดย

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$$

จากสมบัติของผลคูณไขว้ จะได้ว่า $\mathbf{B}(t)$ ตั้งฉากกับทั้ง $\mathbf{T}(t)$ และ $\mathbf{N}(t)$ นอกจากนี้ เรายังทราบว่า $\mathbf{B}(t)$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย กล่าวคือ

$$\|\mathbf{B}(t)\| = \|\mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)\| = \|\mathbf{T}(t)\|\|\mathbf{N}(t)\| \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

ตัวอย่าง 4. **จงหาเวกเตอร์คู่แนวฉากหนึ่งหน่วยของเส้นโค้ง** C **ที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์** $\mathbf{r}(t) = e^t \cos t\mathbf{i} + e^t \sin t\mathbf{j} + \mathbf{k}$ **ณ** $t = t_0$