

Curvature and Radius of Curvature

กลุ่ม 01

Chapter 3 Vector-Valued Functions

แบบฝึกหัด:

ABD12 : ection 12.5 : 1-2, 5-12, 13-16, 17-18, 19-22, 23, 25-28, 29-32, 45-48

บทนิยาม 1. ให้ C เป็นเส้นโค้งปรับเรียบในปริภูมิ 2 มิติ/ 3 มิติ ที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ที่มีความยาวส่วนโค้ง s เป็นตัวแปรเสริม ความโค้ง (curvature) ของ C เขียนแทนด้วย $\kappa = \kappa(s)$ และกำหนดโดย

$$\kappa(s) = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\| = \|\mathbf{r}''(s)\|$$

สังเกตว่าความโค้งของเส้นโค้ง คือ ขนาดของอัตราการเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย \mathbf{T} เทียบกับความยาวส่วนโค้ง s นั่นเอง ซึ่งโดยทั่วไปแล้วความโค้งของเส้นโค้ง ณ แต่ละจุดบนเส้นโค้งจะไม่เท่ากัน ยกเว้นเส้นตรง และวงกลมในปริภูมิ 2 มิติตั้งตัวอย่างที่จะกล่าวถึงต่อไป

ตัวอย่าง 1. พิจารณาสมการเส้นตรงในรูป $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ ที่ผ่านจุดปลายของเวกเตอร์ตำแหน่ง \mathbf{r}_0 และขนานกับเวกเตอร์ \mathbf{v}

1. จงเขียนสมการเส้นตรง $\mathbf{r}(s)$ ที่มีความยาวส่วนโค้ง s เป็นตัวแปรเสริม
2. จงหาความโค้งของเส้นตรง ณ จุดใด ๆ

.

สังเกตว่าในการหาความโค้งของเส้นโค้งนั้น เราจำเป็นต้องเปลี่ยนฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ของตัวแปรเสริม t เป็นตัวแปรเสริมของความยาวส่วนโค้ง s ก่อน จึงจะทำการคำนวณได้ ในทฤษฎีบทต่อไปนี้จะเราสามารถคำนวณความโค้งโดยใช้อนุพันธ์ของฟังก์ชันของตัวแปร t ดังนี้

ทฤษฎีบท 1. ให้ C เป็นเส้นโค้งในปริภูมิ 2 มิติ/ 3 มิติ ที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t)$ ที่เป็นฟังก์ชันปรับเรียบ จะได้ว่า สำหรับทุก t ที่ $\mathbf{T}'(t)$ และ $\mathbf{r}'(t)$ หาค่าได้

$$1. \kappa(t) = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

$$2. \kappa(t) = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$$

ตัวอย่าง 2. จงหาความโค้งของวงกลมที่มีรัศมี a หน่วยและมีจุดศูนย์กลางที่ (x_0, y_0)

ตัวอย่าง 3. กำหนดให้ $a > 0$ จงหาความโค้งของเกลียวเชิงวงกลม $\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + ct \mathbf{k}$

ตัวอย่าง 4. จงหาความโค้งของวงรี $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 3\sin t\mathbf{j}$ ณ จุดปลายแกนเอกและปลายแกนโท

จากตัวอย่างข้างต้นนี้ จะได้ว่า ความโค้ง ณ จุดปลายแกนเอกของวงรี คือ $\frac{3}{4}$ และ ความโค้ง ณ จุดปลายแกนโท $\frac{2}{9}$ ในอีกด้านหนึ่ง เราทราบว่าความโค้งของวงกลมรัศมี a หน่วยเป็นค่าคงตัว $\frac{1}{a}$ นั่นคือ ความโค้งของวงรี ณ จุดปลายแกนเอกของวงรีเท่ากับ ความโค้งของวงกลมรัศมี $\frac{4}{3}$ หน่วย และความโค้งของวงรี ณ จุดปลายแกนโทของวงรี เท่ากับความโค้งของวงกลมรัศมี $\frac{9}{2}$ หน่วยดัง Figure 1 และ 2

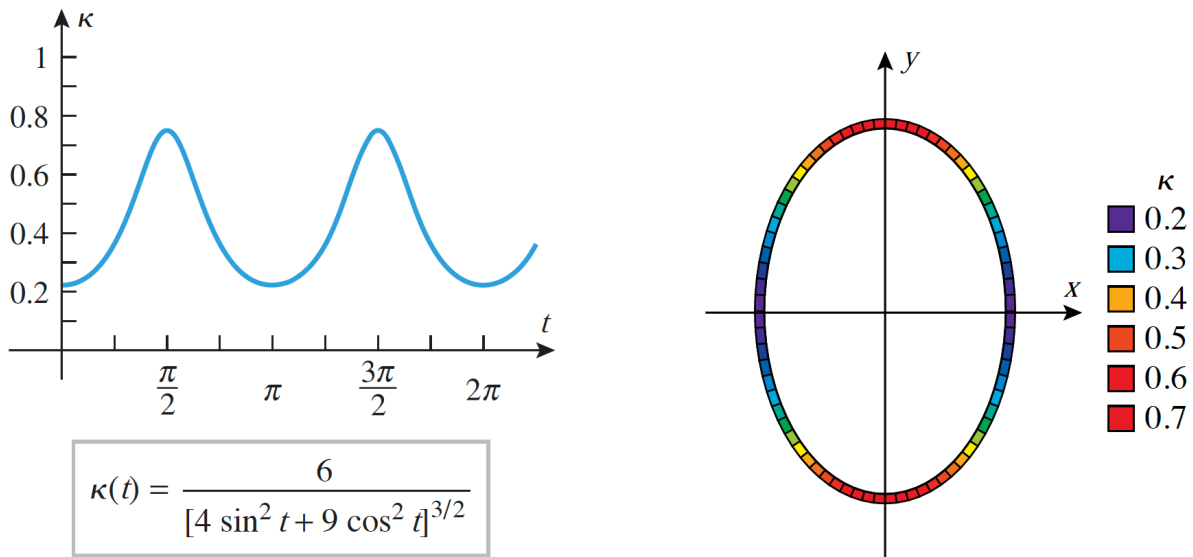


Figure 1: ความโค้ง ณ จุดต่าง ๆ ของวงรี ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 877)

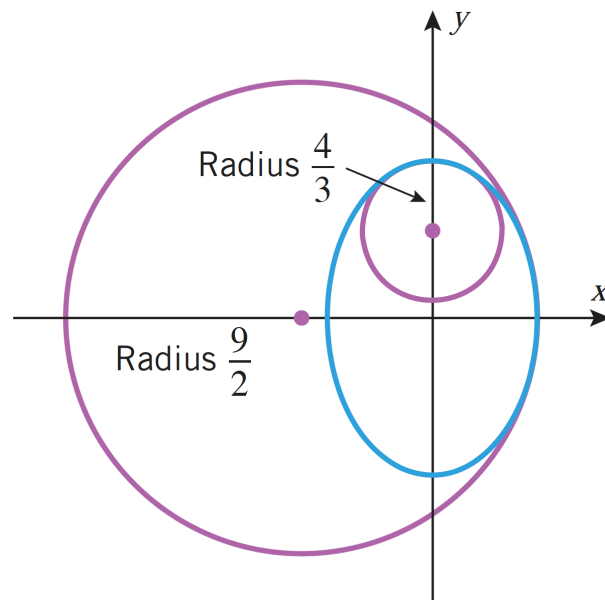


Figure 2: ความโค้งของวงรี ณ จุดปลายแกนเอกและปลายแกนโท ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 877)

บทนิยาม 2. ให้ C เป็นเส้นโค้งในปริภูมิ 2 มิติที่มีความโค้ง $\kappa \neq 0$ ณ จุด P เราจะเรียก

- วงกลมรัศมี $\rho = \frac{1}{\kappa}$ หน่วย ที่สัมผัสกับ C ที่จุด P และมีจุดศูนย์กลางอยู่ภายในด้านเว้า (concave) ของส่วนโค้ง ว่า วงกลมสัมผัสประชิด (osculating circle) หรือ วงกลมของความโค้ง (circle of curvature) ณ จุด P
- รัศมี ρ หน่วยของวงกลมสัมผัสประชิด ว่า รัศมีของความโค้ง (radius of curvature) ณ จุด P
- จุดศูนย์กลางของวงกลมสัมผัสประชิด ว่า จุดศูนย์กลางของความโค้ง (center of curvature) ณ จุด P

ซึ่งอธิบายได้ดัง Figure 3

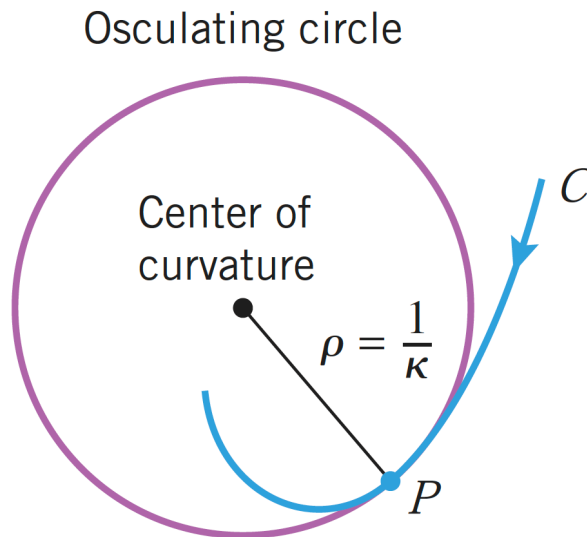


Figure 3: วงกลมสัมผัสประชิดและรัศมีของความโค้ง ณ จุด P ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 877)

ตัวอย่าง 5. จงหาหาค่าของความโค้งของเส้นโค้งที่กำหนดโดย $\mathbf{r}(t) = e^{-t} \cos t \mathbf{i} + e^{-t} \sin t \mathbf{j}$ เมื่อ t มีค่าใกล้เคียงนั้นต์