Line Integrals

แบบฝึกหัด:

ABD12 : Section 15.2 : 1(b), 2(b), 7-10, 11(b,c), 12(b,c,d), 13, 14, 17, 23-30, 33-34, 35-36, 37-40, 41, 42, 43, 44, 45-48, 49-50, 54, 56

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาปริพันธ์ตามเส้นของฟังก์ชันในปริภูมิ 2 มิติดังนี้

บทนิยาม 1. ให้ C เป็นเส้นโค้งปรับเรียบในปริภูมิ 2 มิติที่กำหนดโดยสมการอิงตัวแปรเสริม

$$x = x(t), y = y(t) \qquad \text{สำหรับทุก } t \in [a,b]$$

และให้ $f(x,y)$ และ $g(x,y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน C
ปริพันธ์ตามเส้น (line integral) ของ f บน C เทียบ x กำหนดโดย

$$\int_C f(x,y)dx = \int_a^b f(x(t),y(t))x'(t)dt$$

และปริพันธ์ตามเส้น (line integral) ของ g บน C เทียบ y กำหนดโดย

$$\int_C g(x,y)dy = \int_a^b g(x(t),y(t))y'(t)dt$$

โดยทั่วไปแล้ว ถ้าต้องการคำนวณปริพันธ์ตามเส้นเทียบ x และ y พร้อมกัน เราจะเขียนแทนด้วย

$$\int_C f(x,y)dx + g(x,y)dy := \int_C f(x,y)dx + \int_C g(x,y)dy$$

ตัวอย่าง 1. จงหาค่าของ $\int_C 2xydy$ โดยที่ C เป็นส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $(0,0)$ และ $(1,3)$ โดยมีทิศทางการเพิ่มขึ้นของตัวแปรเสริมดังนี้

1. จาก $(0,0)$ ไปยัง $(1,3)$
2. จาก $(1,3)$ ไปยัง $(0,0)$

ทฤษฎีบท 1. ให้ C เป็นเส้นโค้งปรับเรียบ และ $-C$ เป็นเส้นโค้งที่บรรจุทุกจุดของ C แต่มีทิศทางตรงข้ามกับ C ถ้า $f(x,y)$ และ $g(x,y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน C แล้ว

$$\int_{-C} f(x,y)dx + g(x,y)dy = -\int_{C} f(x,y)dx + g(x,y)dy$$

ตัวอย่าง 2. จงหาค่าของ $\int_C (3x^2+y^2)dx + 2xydy$ โดยที่ C เป็นส่วนของวงกลมที่กำหนดโดย $x = \cos t$ และ $y = \sin t$ สำหรับทุก $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ โดยมีทิศทางการเพิ่มขึ้นของตัวแปรเสริมในทิศทวนเข็มนาฬิกา

ตัวอย่าง 3. จงหาค่าของ $\int_C (x^2+y)dx+(x^2+y)dy$ **โดยที่** C **เป็นส่วนของพาราโบลา** $y=x^2$ **จากจุด** $(0,0)$ **ไปยัง** $(2,4)$

สังเกตว่าในการหาปริพันธ์ตามเส้นนั้น เส้นโค้ง C ต้องเป็นเส้นโค้งปรับเรียบ อย่างไรก็ตาม ถ้า C เป็นเส้นโค้งปรับเรียบเป็นช่วงที่สามารถแบ่งออกเป็นช่วงย่อย $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ที่เป็นเส้นโค้งปรับเรียบและจุดเริ่มต้นของ C_{i+1} เป็นจุดปลายของ C_i สำหรับทุก $i = 1, \ldots, n-1$ เรานิยามปริพันธ์ตามเส้นบนเส้นโค้งปรับเรียบเป็นช่วงนี้ได้เป็น

$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \cdots + \int_{C_n}$$

ตัวอย่าง 4. จงหาค่าของ $\int_C x^2 y dx + x dy$ โดยที่ C เป็นเส้นรอบรูปสามเหลี่ยมมุมฉากจากจุด $(0,0)$ ไปยัง $(1,0)$ ต่อไปยัง $(1,2)$ และกลับไปยังจุด $(0,0)$

ตัวอย่าง 5. **จงหาค่าของ** $\int_C (x+y)^2dx+(x-y)^2dy$ **โดยที่** C **เป็นเส้นโค้งที่กำหนดโดยฟังก์ชัน** $y=|2x|$ **จากจุด** $(-3,6)$ **ไปยัง** $(2,4)$

ในลำดับต่อไป เราจะศึกษาสมบัติของปริพันธ์ตามเส้นของฟังก์ชันในปริภูมิ 2 มิติเพิ่มเติม ปริพันธ์ตามเส้นในปริภูมิ 3 มิติ และการประยุกต์ใช้ปริพันธ์ตามเส้นดังนี้

ทฤษฎีบท 2. ให้ C เป็นเส้นโค้งปรับเรียบที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t)$ สำหรับทุก $t \in [a,b]$ ถ้าเส้นโค้ง C สามารถกำหนดได้โดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\tilde{\mathbf{r}}(t)$ สำหรับทุก $t \in [c,d]$ ด้วยและทิศทางการเพิ่มขึ้นของตัวแปรเสริมคงเดิม แล้วปริพันธ์ตามเส้นบน C ที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t)$ และ $\tilde{\mathbf{r}}(t)$ เท่ากัน

ตัวอย่าง 6. จงหาค่าของ $\int_C xydx + (x^2+y^2)dy$ โดยที่ C เป็นเส้นโค้งที่กำหนดดังนี้

C_1: $x = \cos(2t), y = \sin(2t)$ สำหรับทุก $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

C_2: $x = \cos(t^2), y = \sin(t^2)$ สำหรับทุก $t \in \left[0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right]$

C_3: $x = \cos(-t), y = \sin(t)$ สำหรับทุก $t \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

C_4: $x = t, y = \sqrt{1-t^2}$ สำหรับทุก $t \in [0,1]$

บทนิยาม 2. ให้ D เป็นเซตของจุดในปริภูมิ 2 มิติ สนามเวกเตอร์ (vector field) บนปริภูมิ คือ ฟังก์ชัน $\mathbf{F}$ ที่ส่งแต่ละจุดใน D เป็นเวกเตอร์ $\mathbf{F}(x,y)$ เพียงค่าเดียวเท่านั้น

เนื่องจาก $\mathbf{F}(x,y)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ของตัวแปร x และ y นั่นคือ จะมีฟังก์ชันส่วนประกอบ $f(x,y)$ และ $g(x,y)$ ที่ทำให้

$$\mathbf{F}(x,y) = f(x,y)\mathbf{i} + g(x,y)\mathbf{j}$$

ตัวอย่าง 7. จงร่างสนามเวกเตอร์ของจุดในปริภูมิ 2 มิติ ที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{F}(x,y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$

พิจารณาเวกเตอร์ตำแหน่ง $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ จะได้ $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$ นั่นคือ

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_C (f(x,y)\mathbf{i} + g(x,y)\mathbf{j})\cdot(dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) \\ &= \int_C f(x,y)dx + g(x,y)dy\end{aligned}$$

บทนิยาม 3. ให้ $\mathbf{F}$ เป็นสนามเวกเตอร์ที่มีความต่อเนื่อง และ C เป็นเส้นโค้งปรับเรียบที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t)$ ปริพันธ์ตามเส้นของ $\mathbf{F}$ บน C (line integral of $\mathbf{F}$ along C) กำหนดโดย

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

สังเกตว่า ถ้า C เป็นเส้นโค้งที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ สำหรับทุก $t \in [a,b]$ จะได้ $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = f(x(t),y(t))\mathbf{i} + g(x(t),y(t))\mathbf{j}$

นั่นคือ

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)dt$$

ตัวอย่าง 8. จงหาค่าของ $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ โดยที่ $\mathbf{F}(x,y) = \cos x\mathbf{i} + \sin x\mathbf{j}$ และ C เป็นเส้นโค้งที่กำหนดดังนี้

1. $C : \mathbf{r}(t) = -\frac{\pi}{2}\mathbf{i} + t\mathbf{j}\ (1 \le t \le 2)$
2. $C : \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}\ (-1 \le t \le 2)$

ปริพันธ์ตามเส้นมีการประยุกต์ใช้ที่สำคัญในเรื่อง งาน ที่เกิดจากการใช้แรง $\mathbf{F}$ ทำให้อนุภาคเคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้ง

บทนิยาม 4. ให้ $\mathbf{F}$ เป็นสนามเวกเตอร์แรงที่มีความต่อเนื่องซึ่งใช้ในการเคลื่อนที่อนุภาคตามเส้นโค้งปรับเรียบ C ที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t)$ และมีทิศทางการเพิ่มขึ้นของตัวแปรเสริมเป็นทิศทางการเคลื่อนที่ของอนุภาค งาน (work) ที่เกิดจากสนามเวกเตอร์แรงที่กระทำต่ออนุภาค กำหนดโดย

$$\mathbf{W} := \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

ทั้งนี้ ที่มาของบทนิยามข้างต้นนี้ นักศึกษาสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จาก Anton et al. (2012) หน้า 1105 - 1106

ตัวอย่าง 9. จงหางานที่เกิดจากเคลื่อนที่ของอนุภาคซึ่งเคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้ง $y = x^2$ จากจุด $(-1,1)$ ไปยัง $(2,4)$ ในสนามแรง $\mathbf{F}(x,y) = x^3y\mathbf{i} + (x-y)\mathbf{j}$

ปริพันธ์ตามเส้นสามารถอธิบายเรื่องงานในปริภูมิ 3 มิติได้เช่นกัน โดยจะเกี่ยวข้องกับปริพันธ์ตามเส้นในปริภูมิ 3 มิติดังนี้

บทนิยาม 5. ให้ C เป็นเส้นโค้งปรับเรียบในปริภูมิ 3 มิติที่กำหนดโดยสมการอิงตัวแปรเสริม

$$x = x(t), y = y(t) \text{ และ } z = z(t) \text{ สำหรับทุก } t \in [a,b]$$

และให้ $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ และ $h(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน C
ปริพันธ์ตามเส้น (line integral) ของ f บน C เทียบ x กำหนดโดย

$$\int_C f(x,y,z)dx = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))x'(t)dt$$

ปริพันธ์ตามเส้น (line integral) ของ g บน C เทียบ y กำหนดโดย

$$\int_C g(x,y,z)dy = \int_a^b g(x(t),y(t),z(t))y'(t)dt$$

และปริพันธ์ตามเส้น (line integral) ของ h บน C เทียบ z กำหนดโดย

$$\int_C h(x,y,z)dz = \int_a^b h(x(t),y(t),z(t))z'(t)dt$$

โดยทั่วไปแล้ว ถ้าต้องการคำนวณปริพันธ์ตามเส้นเทียบ x,y และ z พร้อมกัน เราจะเขียนแทนด้วย

$$\int_C f(x,y,z)dx+g(x,y,z)dy+h(x,y,z)dz := \int_C f(x,y,z)dx+\int_C g(x,y,z)dy+\int_C h(x,y,z)dz$$

ตัวอย่าง 10. จงหางานที่เกิดจากเคลื่อนที่ของอนุภาคซึ่งเคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้ง $t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+t^3\mathbf{k}$ จากจุด $(0,0,0)$ ไปยัง $(1,1,1)$ ในสนามแรง

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (y-x^2)\mathbf{i}+(z-y^2)\mathbf{j}+(x-z^2)\mathbf{k}$$