

Independence of Path, Conservative Vector Fields

กลุ่ม 01

Chapter 4 Vector Calculus

แบบฝึกหัด:

ABD12 : Section 15.3 : 1-6, 7, 8, 9-14, 15-18, 19-22, 23-24, 32, 33, 34, 35-36

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาทฤษฎีบทหลักมูลของปริพันธ์ตามเส้น เพื่อช่วยให้การคำนวณปริพันธ์ตามเส้นสะดวกขึ้นดังนี้

จากหัวข้อก่อนหน้านี ถ้า \mathbf{F} เป็นสนามแรงในปริภูมิ 2 มิติ/ 3 มิติ จะได้ว่า งานที่เกิดจากการเคลื่อนที่อนุภาคไปตามเส้นโค้ง C ที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t)$ ภายใต้สนามแรงนี้ คำนวณได้โดย

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

ซึ่งเราจะเรียกปริพันธ์ตามเส้นนี้ว่า ปริพันธ์งาน (work integral) นอกจากนี้ ปริพันธ์งานสามารถเขียนได้เป็น

$$\int_C f(x,y)dx + g(x,y)dy := \int_C f(x,y)dx + \int_C g(x,y)dy$$

หรือ

$$\int_C f(x,y,z)dx + g(x,y,z)dy + h(x,y,z)dz := \int_C f(x,y,z)dx + \int_C g(x,y,z)dy + \int_C h(x,y,z)dz$$

โดยที่ f, g และ h เป็นฟังก์ชันส่วนประกอบของ \mathbf{F} ในแต่ละปริภูมิ

ทั้งนี้ เราจะเรียกเส้นโค้ง C ในปริพันธ์งานว่า วิธีของปริพันธ์ (path of integration)

ตัวอย่าง 1. จงหาค่าของปริพันธ์งาน $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ โดยที่ $\mathbf{F}(x,y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ เป็นสนามแรง และวิธีของปริพันธ์จากจุด $(0,0)$ ไปยัง $(1,1)$ กำหนดดังนี้

1. ส่วนของเส้นตรง $y = x$
2. พาราโบลา $y = x^2$
3. พหุนามกำลังสาม $y = x^3$

บทนิยาม 1. ให้ D เป็นเซตของจุดในปริภูมิ 2 มิติ และ F เป็นสนามเวกเตอร์ในปริภูมิ 2 มิติ

เราจะกล่าวว่า F เป็น สนามเวกเตอร์อนุรักษ์ (conservative vector field) บนบริเวณ D ถ้ามีฟังก์ชันค่าจริง ϕ นิยามบนบริเวณ D ที่ซึ่ง

$$\mathbf{F} = \nabla\phi$$

และเราจะเรียกฟังก์ชันค่าจริง ϕ นี้ว่า ฟังก์ชันศักย์ (potential function)

สังเกตว่าในกรณีที่ $F(x,y)$ เป็นสนามเวกเตอร์ในปริภูมิ 2 มิติ จะได้ว่า F เป็นสนามเวกเตอร์อนุรักษ์ ก็ต่อเมื่อ เราสามารถหาฟังก์ชันศักย์ ϕ ที่ซึ่ง

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j}$$

ทฤษฎีบทที่มีความสำคัญมากในหัวข้อปริพันธ์ตามเส้น คือ ทฤษฎีบทหลักมูลของปริพันธ์ตามเส้น (The Fundamental Theorem of Line Integral) ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

ทฤษฎีบท 1. (ทฤษฎีบทหลักมูลของปริพันธ์ตามเส้น)

ให้ D เป็นบริเวณที่บรรจุจุด (x_0, y_0) และ (x_1, y_1) และ

$$\mathbf{F}(x,y) = f(x,y)\mathbf{i} + g(x,y)\mathbf{j}$$

เป็นสนามเวกเตอร์อนุรักษ์บน D และสมมติให้ฟังก์ชันส่วนประกอบ $f(x,y)$ และ $g(x,y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน D จะได้ว่า

ถ้า $\mathbf{F} = \nabla\phi$ และ C เป็นเส้นโค้งเรียบเป็นช่วงบน D ที่มีจุดเริ่มต้น (x_0, y_0) และจุดปลาย (x_1, y_1) แล้ว

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(x_1, y_1) - \phi(x_0, y_0)$$

จากทฤษฎีบทข้างต้นแสดงให้เห็นว่าค่าของปริพันธ์ตามเส้นของสนามเวกเตอร์อนุรักษ์ตามเส้นโค้งปรับเรียบเป็นช่วงเป็นอิสระตามวิถี (independent of path) กล่าวคือ ค่าของปริพันธ์จะขึ้นอยู่กับจุดเริ่มต้นและจุดปลายของเส้นโค้ง โดยที่ไม่ขึ้นอยู่กับลักษณะของเส้นโค้งเลย เพราะฉะนั้น ปริพันธ์ตามเส้นของสนามเวกเตอร์อนุรักษ์ตามเส้นโค้งปรับเรียบเป็นช่วงสามารถเขียนได้เป็น

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(x_1, y_1) - \phi(x_0, y_0)$$

ตัวอย่าง 2. จงแสดงว่าสนามเวกเตอร์ $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ เป็นสนามเวกเตอร์อนุรักษ์บน \mathbb{R}^2 และจงใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของปริพันธ์ตามเส้นคำนวณค่าของ $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ โดยที่ C เป็นเส้นโค้งปรับเรียบเป็นช่วงใด ๆ ที่มีจุดเริ่มต้น $(0, 0)$ และจุดปลาย $(1, 1)$

ตัวอย่าง 3. จงแสดงว่าสนามเวกเตอร์ $\mathbf{F}(x,y) = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j}$ เป็นสนามเวกเตอร์อนุรักษ์บน \mathbb{R}^2 และจงใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของปริพันธ์ตามเส้นคำนวณค่าของ $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ โดยที่ C เป็นเส้นโค้งปรับเรียบเป็นช่วงใด ๆ ที่มีจุดเริ่มต้น $(0,0)$ และจุดปลาย $(2,4)$

ตัวอย่าง 4. ให้ \mathbf{F} เป็นสนามเวกเตอร์อนุรักษ์บน \mathbb{R}^2 ที่มีความต่อเนื่อง ถ้า C เป็นเส้นโค้ง
ปรับเรียบเป็นช่วงปิด แล้วจงแสดงว่า $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$

สังเกตว่าในการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของปริพันธ์ตามเส้นนั้น เราจำเป็นต้องตรวจสอบว่าสนามเวกเตอร์ F ที่พิจารณาเป็นสนามเวกเตอร์อนุรักษ์โดยการหาฟังก์ชันศักย์ ϕ ที่ทำให้ $F = \nabla\phi$ ซึ่งอาจไม่สะดวกมากนัก ในส่วนต่อไปนี้จะเราจะศึกษาทฤษฎีบทเกี่ยวกับการตรวจสอบสนามเวกเตอร์ที่พิจารณาว่าเป็นสนามเวกเตอร์อนุรักษ์หรือไม่ มีรายละเอียดดังนี้

- บทนิยาม 2. • เราจะกล่าวว่าเส้นโค้ง C ในปริภูมิ 2 มิติที่นิยามบนช่วง $[a, b]$ เป็น เส้นโค้งอย่างง่าย (simple curve) ถ้า C ไม่มีจุดตัดกับตัวเองบน $[a, b]$
- เราจะกล่าวว่าเซต D ที่เป็นเซตของจุดในปริภูมิ 2 มิติเป็น เซตเชื่อมโยงอย่างง่าย (simply connected set) ถ้าไม่มีเส้นโค้งปิดอย่างง่ายใน D ที่ล้อมรอบบริเวณที่ไม่อยู่ใน D

ทฤษฎีบท 2. (การตรวจสอบสนามเวกเตอร์อนุรักษ์)

ให้บริเวณ D ในปริภูมิ 2 มิติเป็นเซตเชื่อมโยงอย่างง่าย และ

$$\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$$

เป็นสนามเวกเตอร์บน D และสมมติให้ฟังก์ชันส่วนประกอบ $f(x, y)$ และ $g(x, y)$ และอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งที่เกี่ยวข้องเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน D จะได้ว่าสนามเวกเตอร์ F เป็นสนามเวกเตอร์อนุรักษ์ ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $(x, y) \in D$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

ตัวอย่าง 5. พิจารณาสนามเวกเตอร์ $\mathbf{F}(x, y) = 2xy^3\mathbf{i} + (1 + 3x^2y^2)\mathbf{j}$

(i) จงแสดงว่า \mathbf{F} เป็นสนามเวกเตอร์อนุรักษ์บน \mathbb{R}^2

(ii) จงหาฟังก์ชันศักย์ ϕ

จากทฤษฎีบทหลักมูลของปริพันธ์ตามเส้น และทฤษฎีบทการตรวจสอบสนามเวกเตอร์อนุรักษ์ เราสามารถสรุปวิธีการหาค่า $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ได้ดังนี้

1. ตรวจสอบว่า สนามเวกเตอร์ $\mathbf{F}(x,y)$ เป็น สนามเวกเตอร์อนุรักษ์ โดยใช้ทฤษฎีบทการตรวจสอบสนามเวกเตอร์อนุรักษ์

2. หาฟังก์ชันศักย์ $\phi(x,y)$: พิจารณาความสัมพันธ์

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} \quad (1)$$

2.1 หาปริพันธ์ย่อยของ $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ เทียบ x จะได้ฟังก์ชัน

$$\phi(x,y) = u(x,y) + k(y) \quad (2)$$

โดยที่ $k(y)$ เป็นค่าคงตัวจากการหาปริพันธ์ย่อยเทียบ x

2.2 หาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน $\phi(x,y)$ ใน (2) เทียบ y จะได้

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + k'(y)$$

จากนั้นทำกับเทียบพจน์กับ $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ ใน (1) จะได้ $k'(y)$

2.3 หาปริพันธ์ของ $k'(y)$ เทียบ y จะได้ $k(y)$ ซึ่งนำไปแทนใน (2) จะได้ $\phi(x,y)$

3. ประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของปริพันธ์ตามเส้น จะได้

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(x_1,y_1) - \phi(x_0,y_0)$$

ตัวอย่าง 6. จงหาค่าของปริพันธ์ตามเส้น

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} (3x^2 + 2x + y^2)dx + (2xy + y^3)dy$$

ตัวอย่าง 7. จงหางานที่เกิดจากเคลื่อนที่ของอนุภาคจากจุด $(-1, 0)$ ไปยัง $(5, \pi/2)$ ตามเส้นโค้งปรับเรียบเป็นช่วงใด ๆ ในสนามแรง $\mathbf{F}(x, y) = 2x \sin y \mathbf{i} + (x^2 \cos y - 3y^2) \mathbf{j}$