SC 402 202 Calculus for Engineering III 1/2566

Curvature and Radius of Curvature

กลุ่ม 01 Chapter 3 Vector-Valued Functions

แบบฝึกหัด:

ABD12 : Section 12.5 : 1-2, 5-12, 13-16, 17-18, 19-22, 23, 25-28, 29-32, 45-48

บทนิยาม 1. ให้ C เป็นเส้นโค้งปรับเรียบในปริภูมิ 2 มิติ/ 3 มิติ ที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ ($\mathbf{r}(s)$) ที่มีความยาวส่วนโค้ง s เป็นตัวแปรเสริม ความโค้ง (curvature) ของ C เขียนแทนด้วย $\kappa = \kappa(s)$ และกำหนดโดย

kappa

$$\kappa(s) = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\| = \|\mathbf{r}''(s)\|$$

สังเกตว่าความโค้งของเส้นโค้ง คือ ขนาดของอัตราการเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย $\mathbf{T}$ เทียบกับความยาวส่วนโค้ง s นั่นเอง ซึ่งโดยทั่วไปแล้วความโค้งของเส้นโค้ง ณ แต่ละจุดบนเส้นโค้งจะไม่เท่ากัน ยกเว้นเส้นตรง และวงกลมในปริภูมิ 2 มิติดังตัวอย่างที่จะกล่าวถึงต่อไป

ตัวอย่าง 1. พิจารณาสมการเส้นตรงในรูป $\mathbf{r}(t) = \underset{\mathbf{r}(t_0)}{\mathbf{r}_0} + t\mathbf{v}$ ที่ผ่านจุดปลายของเวกเตอร์ตำแหน่ง $\underset{\mathbf{r}(0)}{\mathbf{r}_0}$ และขนานกับเวกเตอร์ $\mathbf{v}$

1. จงเขียนสมการเส้นตรง $\mathbf{r}(s)$ ที่มีความยาวส่วนโค้ง s เป็นตัวแปรเสริม

$$s(t) = \int_{u=t_0}^{u=t} \|\mathbf{r}'(u)\|\,du$$

2. จงหาความโค้งของเส้นตรง ณ จุดใด ๆ

$\kappa(s)$

① พิสูจน์ สมการเส้นตรงคือ $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + t\mathbf{v}$

$$= \mathbf{r}(0) + t\mathbf{v}$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}'(t) = \mathbf{v} \Rightarrow \|\mathbf{r}'(t)\| = \|\mathbf{v}\|$$

ฟังก์ชันความยาวส่วนโค้งที่มีจุด $t_0 = 0$ เป็นจุดอ้างอิง คือ

$$s(t) = \int_{u=0}^{u=t} \|\mathbf{r}'(u)\|\, du = \int_{u=0}^{u=t} \|\mathbf{v}\|\, du = \|\mathbf{v}\| u \Big]_{u=0}^{u=t}$$

$$= \|\mathbf{v}\| t$$

$$\Rightarrow t = \frac{s}{\|\mathbf{v}\|}$$

ดังนั้น สมการเส้นตรงที่มีความยาวส่วนโค้งเป็นตัวแปรเสริม คือ

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_0 + \frac{s}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$$

② พิสูจน์ความโค้งของเส้นตรง ณ จุดใดๆ ดังนี้

จาก $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_0 + \frac{s}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{r}'(s) = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$

$$\Rightarrow \mathbf{r}''(s) = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \|\mathbf{r}''(s)\| = 0$$

ดังนั้น ความโค้งของเส้นตรง ณ จุดใดๆ คือ $\kappa(s) = 0$

#

สังเกตว่าในการหาความโค้งของเส้นโค้งนั้น เราจำเป็นต้องเปลี่ยนฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ของตัวแปรเสริม t เป็นตัวแปรเสริมของความยาวส่วนโค้ง s ก่อน จึงจะทำการคำนวณได้ ในทฤษฎีบทต่อไปนี้ เราสามารถคำนวณความโค้งโดยใช้อนุพันธ์ของฟังก์ชันของตัวแปร t ดังนี้

> **ทฤษฎีบท 1.** ให้ C เป็นเส้นโค้งในปริภูมิ 2 มิติ/ 3 มิติ ที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t)$ ที่เป็นฟังก์ชันปรับเรียบ จะได้ว่า สำหรับทุก t ที่ $\mathbf{T}'(t)$ และ $\mathbf{r}'(t)$ หาค่าได้
>
> 1. $\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$
> 2. $\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$

ตัวอย่าง 2. จงหาความโค้งของวงกลมที่มีรัศมี a >0 หน่วยและมีจุดศูนย์กลางที่ (x_0, y_0)

วิธีทำ เนื่องจากสมการของวงกลมนี้คือ

$$\mathbf{r}(t) = (x_0 + a\cos t)\mathbf{i} + (y_0 + a\sin t)\mathbf{j}$$

ดังนั้น $\mathbf{r}'(t) = (-a\sin t)\mathbf{i} + (a\cos t)\mathbf{j}$

$\Rightarrow \mathbf{r}''(t) = (-a\cos t)\mathbf{i} + (-a\sin t)\mathbf{j}$

ทำให้ $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2} = \sqrt{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} = \sqrt{a^2} = a$

ดังนั้น $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a\sin t & a\cos t & 0 \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ -a\sin t & a\cos t \\ -a\cos t & -a\sin t \end{matrix}$

$= a^2\sin^2 t\,\mathbf{k} + a^2\cos^2 t\,\mathbf{k}$

$= a^2(\sin^2 t + \cos^2 t)\mathbf{k} = a^2\mathbf{k}$

นั่นคือ $\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\| = \sqrt{(a^2)^2} = a^2$

ดังนั้น ความโค้งของวงกลม นี้ คือ

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$$

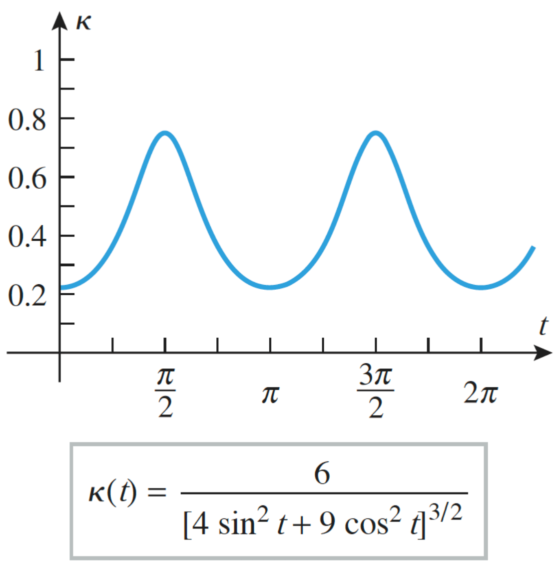
$$= \frac{a^2}{a^3} = \frac{1}{a} \qquad \#$$

ตัวอย่าง 3. กำหนดให้ $a > 0$ จงหาความโค้งของเกลียวเชิงวงกลม $\mathbf{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\sin t\mathbf{j} + ct\mathbf{k}$

$$\kappa(t) = \frac{a}{a^2+c^2}$$

ตัวอย่าง 4. **จงหาความโค้งของวงรี $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 3\sin t\mathbf{j}$ ณ จุดปลายแกนเอกและปลายแกนโท**

จากตัวอย่างข้างต้นนี้ จะได้ว่า ความโค้ง ณ จุดปลายแกนเอกของวงรี คือ $\frac{3}{4}$ และความโค้ง ณ จุดปลายแกนโท $\frac{2}{9}$ ในอีกด้านหนึ่ง เราทราบว่าความโค้งของวงกลมรัศมี a หน่วยเป็นค่าคงตัว $\frac{1}{a}$ นั่นคือ ความโค้งของวงรี ณ จุดปลายแกนเอกของวงรีเท่ากับความโค้งของวงกลมรัศมี $\frac{4}{3}$ หน่วย และความโค้งของวงรี ณ จุดปลายแกนโทของวงรีเท่ากับความโค้งของวงกลมรัศมี $\frac{9}{2}$ หน่วยดัง Figure 1 และ 2



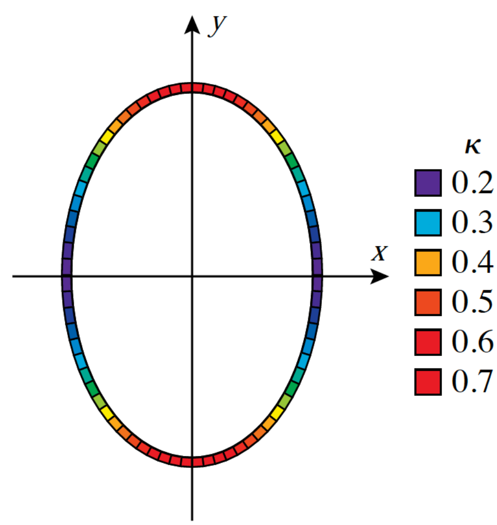


Figure 1: ความโค้ง ณ จุดต่าง ๆ ของวงรี ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 877)

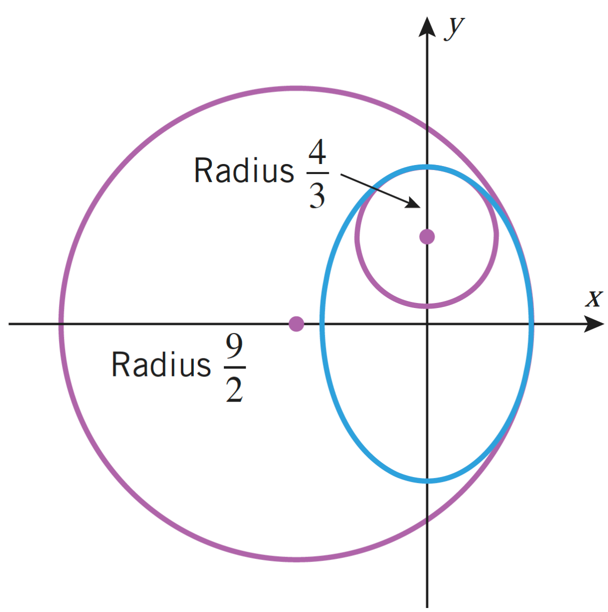


Figure 2: ความโค้งของวงรี ณ จุดปลายแกนเอกและปลายแกนโท ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 877)

บทนิยาม 2. ให้ C เป็นเส้นโค้งในปริภูมิ 2 มิติที่มีความโค้ง $\kappa \neq 0$ ณ จุด P เราจะเรียก

- วงกลมรัศมี $\rho = \frac{1}{\kappa}$ หน่วย ที่สัมผัสกับ C ที่จุด P และมีจุดศูนย์กลางอยู่ภายในด้านเว้า (concave) ของส่วนโค้ง ว่า วงกลมสัมผัสประชิด (osculating circle) หรือ วงกลมของความโค้ง (circle of curvature) ณ จุด P
- รัศมี ρ หน่วยของวงกลมสัมผัสประชิด ว่า รัศมีของความโค้ง (radius of curvature) ณ จุด P
- จุดศูนย์กลางของวงกลมสัมผัสประชิด ว่า จุดศูนย์กลางของความโค้ง (center of curvature) ณ จุด P

ซึ่งอธิบายได้ดัง Figure 3

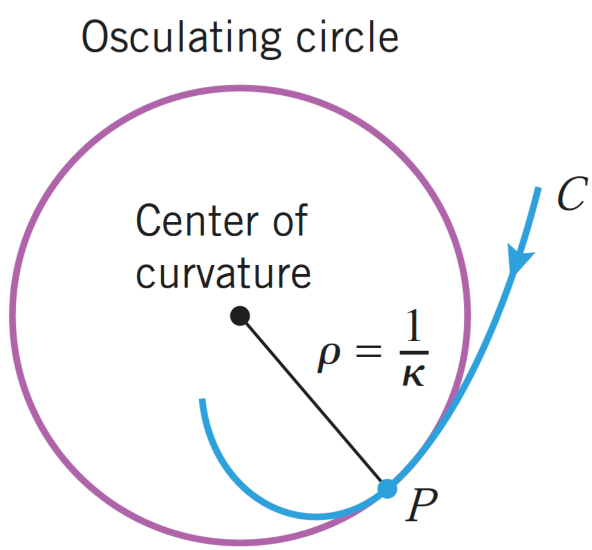


Figure 3: วงกลมสัมผัสประชิดและรัศมีของความโค้ง ณ จุด P ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 877)

ตัวอย่าง 5. จงหารัศมีของความโค้งของเส้นโค้งที่กำหนดโดย $\mathbf{r}(t) = e^{-t}\cos t\mathbf{i} + e^{-t}\sin t\mathbf{j}$ เมื่อ t มีค่าใกล้อนันต์

$$\rho(t) = \frac{1}{\kappa(t)} = \sqrt{2}e^{-t}$$

ถ้า t มีค่าใกล้อนันต์ แล้ว $\rho(t) \to 0$

#