SC 402 202 Calculus for Engineering III 1/2566

Green’s Theorem

กลุ่ม 01 Chapter 4 Vector Calculus

แบบฝึกหัด:

ABD12 : Section 15.4 : 1-2, 3-13, 14, 15-18, 20, 21, 23, 24, 26, 29-30, 31, 32, 33-36

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาทฤษฎีบทที่ช่วยให้การคำนวณปริพันธ์ตามเส้นสะดวกขึ้นโดยใช้ความรู้เกี่ยวกับปริพันธ์สองชั้นดังนี้

ทฤษฎีบท 1. (ทฤษฎีบทของกรีน (Green’s Theorem)
ให้ R เป็นบริเวณที่เป็นเซตเชื่อมโยง (simply connected set) ที่มีขอบเขตเป็นเส้นโค้ง C ที่เป็นเส้นโค้งอย่างง่าย (simple) ปิด (closed) เรียบเป็นช่วง (piecewise smooth) และมีทิศทางทวนเข็มนาฬิกา (counterclockwise)

ถ้าฟังก์ชัน $f(x,y)$ และ $g(x,y)$ และอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งที่เกี่ยวข้อง เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนบริเวณเปิดที่บรรจุ R แล้ว ปริพันธ์ตามเส้น

$$\int_C f(x,y)dx + g(x,y)dy = \iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dA$$

เนื่องจากเส้นโค้ง C ที่สอดคล้องกับทฤษฎีบทของกรีนต้องเป็นเส้นโค้งปิด เราอาจใช้สัญลักษณ์ $\oint$ แทน $\int$ เพื่อระบุสมบัติเฉพาะนี้ได้

$\int \quad \oint \quad \oint$

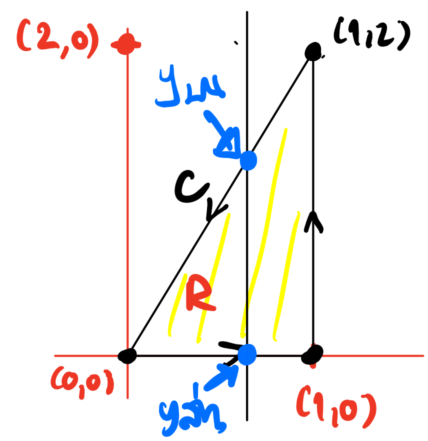
$m = \frac{2-0}{1-0} = 2$

$y - 0 = 2(x-0) \Rightarrow y = 2x$

ตัวอย่าง 1. จงประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทของกรีนเพื่อหาค่าของ

$$\oint_C x^2 y dx + x dy$$

โดยที่ C เป็นวิถีรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีจุดยอดเป็น $(0,0)$, $(1,0)$ และ $(1,2)$ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา



วิธีทำ.

R : simply connected ✓

C : simple ✓ + closed ✓ + p.s. ✓ + c.c.d. ✓

พิจารณา $f(x,y) = x^2 y$:cont. และ $g(x,y) = x$:cont.

และ: $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2$:cont. และ $\frac{\partial g}{\partial x} = 1$:cont.

ขอบเขตของ R :

$x : x = 0 \rightarrow x = 1$

$y : y = 0 \rightarrow y = 2x$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบทของกรีน จะได้ว่า

$$\oint_C x^2 y dx + x dy = \iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dA$$

$$= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=2x} (1 - x^2)\, dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=1} \left(y - x^2 y\right)\Big|_{y=0}^{y=2x} dx = \int_{x=0}^{x=1} (2x - 2x^3)\, dx$$

$$= \left[x^2 - \frac{2x^4}{4}\right]_{x=0}^{x=1}$$

$= 1^2 - \frac{1^4}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ #

ตัวอย่าง 2. จงประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทของกรีนเพื่อหาค่าของ

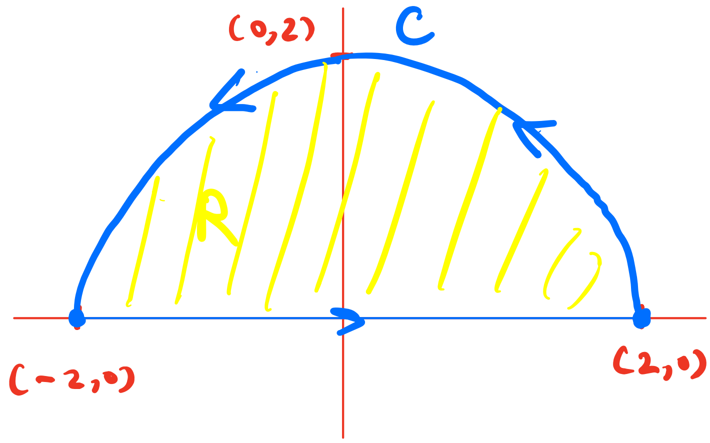
$$\oint_C (e^{x^2} - y)dx + (x + \sin\sqrt{y})dy$$

โดยที่ C เป็นวิถีในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาที่ประกอบด้วยเส้นรอบครึ่งวงกลมรัศมี 2 หน่วยเหนือแกน x และส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $(-2,0)$ กับ $(2,0)$

วิธีทำ

R : simply connected ✓

C : simple ✓ + closed ✓ + p.s. ✓ + c.c.d. ✓



พิจารณา

$f(x,y) = e^{x^2} - y$: cont. และ $g(x,y) = x + \sin\sqrt{y}$: cont.

และ $\frac{\partial f}{\partial y} = -1$: cont. และ $\frac{\partial g}{\partial x} = 1$: cont.

ขอบเขตของ R :

I พิกัดฉาก

$x : x = -2 \to x = 2$

$y : y = 0 \to y = \sqrt{4 - x^2}$

II พิกัดเชิงขั้ว

$r : r = 0 \to r = 2$

$\theta : \theta = 0 \to \theta = \pi$

โดยทฤษฎีบทของกรีน จึงได้ว่า

$$\int_C (e^{x^2} - y)dx + (x + \sin\sqrt{y})dy = \iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dA$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{r=0}^{r=2} (1 - (-1))\, r\, dr\, d\theta = 4\pi$$

ตัวอย่าง 3. จงหางานที่เกิดจากเคลื่อนที่ของอนุภาคจากจุด $(1,1)$ ไปยัง $(4,2)$ ตามเส้นโค้ง $y=\sqrt{x}$ จากนั้นเคลื่อนที่ตามแนวเส้นตรงไปยังจุด $(1,2)$ และเคลื่อนที่ตามแนวเส้นตรงกลับมาที่จุด $(1,1)$ ในสนามแรง $\mathbf{F}(x,y)=(y^2-\sin x)\mathbf{i}+(xy+\ln x)\mathbf{j}$

$$\int_{x=1}^{x=4}\int_{y=\sqrt{x}}^{y=2}\left(y+\frac{1}{x}-2y\right)dy\,dx$$

ในอีกด้านหนึ่ง การประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทของกรีน เราสามารถใช้ปริพันธ์ตามเส้นคำนวณหาพื้นที่ A ของบริเวณ R ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขในทฤษฎีบทของกรีนได้โดย

$$\begin{aligned} A &= \oint_C x\,dy \\ &= \oint_C (-y)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_C (-y)\,dx + x\,dy \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4. จงใช้ปริพันธ์ตามเส้นคำนวณหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งปิดล้อมด้วยวงรี

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ตัวอย่าง 5. จงใช้ปริพันธ์ตามเส้นคำนวณหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งปิดล้อมด้วยรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีจุดยอดเป็น $(0,0)$**,** $(a,0)$ **และ** $(0,b)$ **โดยที่** $a,b>0$