The Divergence Theorem and Stokes' Theorem

แบบฝึกหัด:

ABD12 : Section 15.7 : 1-4, 5-7, 9-19, 20, 21, 22,

Section 15.8 : 1-4, 5-12, 13-16, 17

ในส่วนแรกนี้ เราจะศึกษาทฤษฎีบทที่ช่วยในการคำนวณฟลักซ์ที่ผ่านออกจากพื้นผิวซึ่งปิดล้อมบริเวณในปริภูมิ 3 มิติ ซึ่งเรารู้จักกันในชื่อทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์ จากนั้น เราจะศึกษาทฤษฎีบทที่ช่วยในการคำนวณหางานที่เกิดจากการเคลื่อนที่อนุภาคตามเส้นโค้งในปริภูมิ 3 มิติภายใต้สนามแรงที่กำหนดให้ ซึ่งเรารู้จักกันในชื่อทฤษฎีบทของสโตกส์

บทนิยาม 1. ให้ $\mathbf{F}(x,y,z) = f(x,y,z)\mathbf{i} + g(x,y,z)\mathbf{j} + h(x,y,z)\mathbf{k}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ

1. ตัวดำเนินการไดเวอร์เจนซ์ (Divergence operator) ของ $\mathbf{F}$ เขียนแทนด้วย $\mathrm{div}\mathbf{F}$ และกำหนดโดย

$$\mathrm{div}\mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$$

2. ตัวดำเนินการเคิร์ล (Curl operator) ของ $\mathbf{F}$ เขียนแทนด้วย $\mathrm{curl}\mathbf{F}$ และกำหนดโดย

$$\mathrm{curl}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

หมายเหตุ 1. 1. เราสามารถจำตัวดำเนินการเคิร์ลได้ดังนี้

$$\text{curl}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix}$$

2. ตัวดำเนินการไดเวอร์เจนซ์จะเกี่ยวข้องกับการไหลของของไหลซึ่งไหลออกจากจุดหนึ่ง ๆ ในปริภูมิ 3 มิติ ส่วนตัวดำเนินการเคิร์ลจะเกี่ยวข้องกับการหมุนของของไหลรอบจุดหนึ่ง ๆ ในปริภูมิ 3 มิติ

ตัวอย่าง 1. จงหาตัวดำเนินการไดเวอร์เจนซ์และตัวดำเนินการเคิร์ลของสนามเวกเตอร์

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \underbrace{x^2y}_{f(x,y,z)}\mathbf{i} + \underbrace{2y^3z}_{g(x,y,z)}\mathbf{j} + \underbrace{3z}_{h(x,y,z)}\mathbf{k}$$

วิธีทำ. $\text{div}\mathbb{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$

$= \frac{\partial (x^2y)}{\partial x} + \frac{\partial (2y^3z)}{\partial y} + \frac{\partial (3z)}{\partial z} = 2xy + 6y^2z + 3$

$$\text{curl}\,\mathbb{F} = \left|\begin{matrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & 2y^3z & 3z \end{matrix}\right| \begin{matrix} i & j \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ x^2y & 2y^3z \end{matrix}$$

$= \frac{\partial(3z)}{\partial y}i + \frac{\partial(x^2y)}{\partial z}j + \frac{\partial(2y^3z)}{\partial x}k$

$- \frac{\partial(x^2y)}{\partial y}k - \frac{\partial(2y^3z)}{\partial z}i - \frac{\partial(3z)}{\partial x}j$

$= 0i + 0j + 0k - x^2k - 2y^3i - 0j$

$= -2y^3i - x^2k$ #

ทฤษฎีบท 1. (ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์/ ทฤษฎีบทของเกาส์)
ให้ G เป็นทรงตันที่มีพื้นผิวเป็น σ ซึ่งมีทิศทางด้านนอก ถ้าฟังก์ชันส่วนประกอบของ

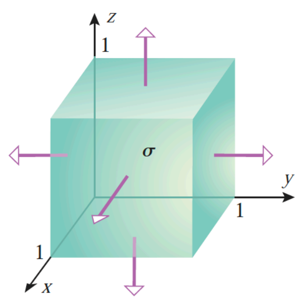
$$\mathbf{F}(x,y,z) = f(x,y,z)\mathbf{i} + g(x,y,z)\mathbf{j} + h(x,y,z)\mathbf{k}$$

เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตเปิดที่บรรจุ σ แล้ว

$$\iint_{\sigma} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = \iiint_{G} \mathrm{div}\mathbf{F}dV$$

หมายเหตุ 2. จากทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์จะได้ว่าฟลักซ์ของสนามเวกเตอร์ที่ไหลออกจากพื้นผิวปิดหาได้จากปริพันธ์สามชั้นของตัวดำเนินการไดเวอร์เจนซ์บนทรงตันซึ่งถูกปิดล้อมด้วยพื้นผิวปิดนั้น ๆ นั่นเอง

ตัวอย่าง 2. กำหนดให้ σ เป็นพื้นผิวลูกบาศก์และมีทิศทางออกดัง Figure 1



ขอบเขต G

$x : x=0 \rightarrow x=1$

$y : y=0 \rightarrow y=1$

Figure 1: ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1141)

$z : z=0 \rightarrow z=1$

จงใช้ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์หาค่าฟลักซ์

$$\iint_{\sigma} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$$

ของสนามแรง $\mathbf{F}(x,y,z) = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ ที่ผ่านออกจากพื้นผิว σ

วิธีทำ จากสูตร $\iint\limits_{S} \mathbb{F}\cdot n\, dS = \iiint\limits_{G} \operatorname{div}\mathbb{F}\, dV$

พิจารณา $\operatorname{div}\mathbb{F} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y} + \dfrac{\partial h}{\partial z}$

$$= \frac{\partial(2x)}{\partial x} + \frac{\partial(3y)}{\partial y} + \frac{\partial(z^2)}{\partial z} = 2+3+2z = 2z+5$$

ดังนั้น

$$\iint\limits_{S} \mathbb{F}\cdot n\, dS = \iiint\limits_{G} (2z+5)\, dV$$

$$= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=1} \int_{z=0}^{z=1} (2z+5)\, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=1} 6\, dy\, dx$$

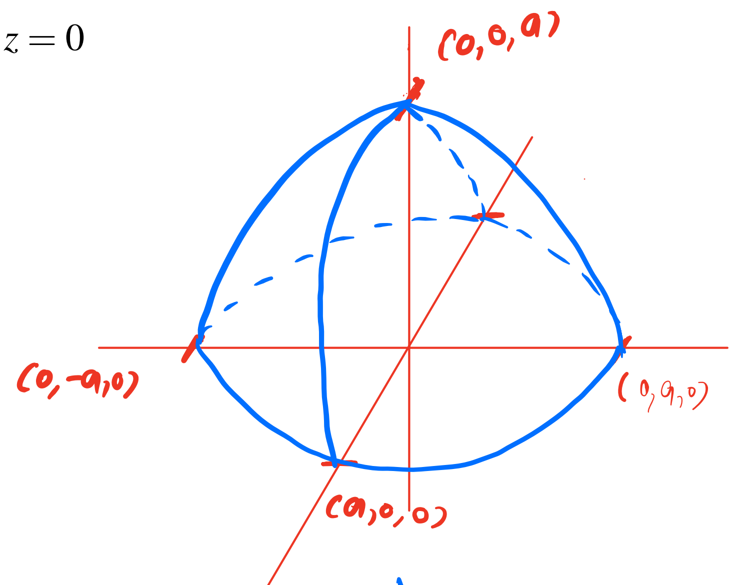
$$= \int_{x=0}^{x=1} 6\, dx = 6$$

#

ตัวอย่าง 3. กำหนดให้ $a > 0$ จงใช้ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์หาค่าฟลักซ์ด้านนอก

$$\iint_\sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

ของสนามเวกเตอร์ $\mathbf{F}(x,y,z) = 2x\mathbf{i} - 3y\mathbf{j} + 5z\mathbf{k}$ ที่ผ่านพื้นผิวของบริเวณ G ที่ปิดล้อมด้วยครึ่งวงกลม $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ และระนาบ $z = 0$



วิธีทำ จากสูตร

$$\iint_\sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_G \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV$$

พิจารณา

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial(2x)}{\partial x} + \frac{\partial(-3y)}{\partial y} + \frac{\partial(5z)}{\partial z}$$

$$= 2 - 3 + 5 = 4$$

ขอบเขตของ G

$\rho : \rho = 0 \to \rho = a$

$\phi : \phi = 0 \to \phi = \pi/2$

$\theta : \theta = 0 \to \theta = 2\pi$

ดังนั้น

$$\iint_\sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_G 4 \, dV$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\phi=0}^{\phi=\pi/2} \int_{\rho=0}^{\rho=a} 4\rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= \cdots \left(\frac{8\pi a^3}{3} \right)$$

ตอบ

#

ตัวอย่าง 4. จงใช้ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์หาค่าฟลักซ์ด้านนอก

$$\iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

ของสนามเวกเตอร์ $\mathbf{F}(x,y,z) = (5x^3 + 12xy^2)\mathbf{i} + (y^3 + e^y \sin z)\mathbf{j} + (5z^3 + e^y \cos z)\mathbf{k}$ **ที่ผ่านพื้นผิวของบริเวณ** G **ที่ปิดล้อมด้วยวงกลม** $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ **และ** $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ **เหนือระนาบ** $z = 0$

$$\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\phi=0}^{\phi=\pi/2} \int_{\rho=1}^{\rho=2} 15\rho^4 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

ในลำดับต่อไปนี้ เราจะศึกษาทฤษฎีบทซึ่งเป็นกรณีทั่วไปของทฤษฎีบทของกรีนในบริบทของปริภูมิ 3 มิติซึ่งเกี่ยวข้องกับการหมุนของของไหลดังนี้

ให้ σ เป็นพื้นผิวมีทิศทางซึ่งปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง C ที่เป็นเส้นโค้งอย่างง่ายและปิด ดัง Figure 2 (a)

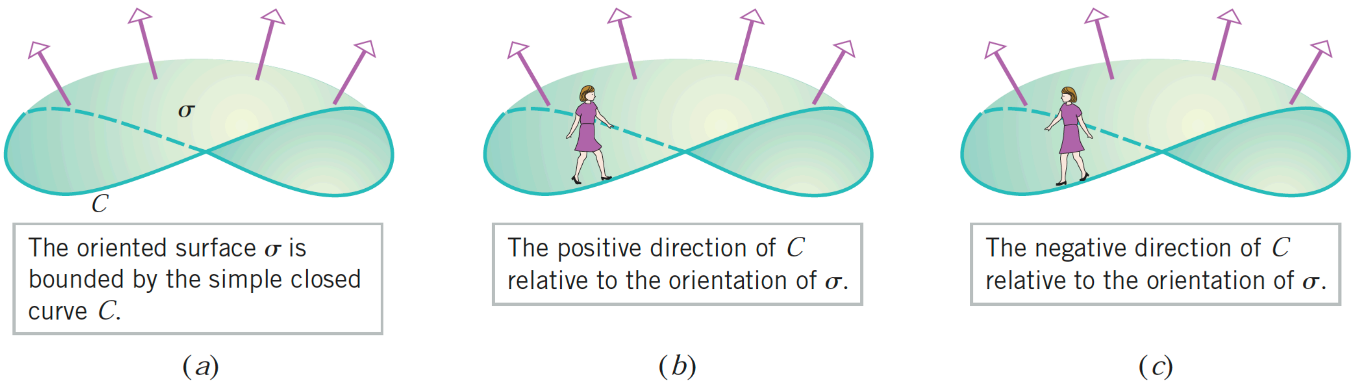


Figure 2: ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1159)

เราจะพบความสัมพันธ์ของ σ และ C ได้เป็น 2 ลักษณะดังนี้

สมมติให้ น.ส.เอ เดินไปตามเส้นโค้ง C โดยที่ศีรษะของเธออยู่ในทิศทางเดียวกับทิศทางของ σ เราจะกล่าวว่า น.ส.เอเดินไปใน

1. ทิศทางบวก (positive orientation) ของ σ ถ้าพื้นผิว σ อยู่ด้านซ้ายมือของ น.ส.เอ ดัง Figure 2 (b)

2. ทิศทางลบ (negative orientation) ของ σ ถ้าพื้นผิว σ อยู่ด้านขวามือของ น.ส.เอ ดัง Figure 2 (c)

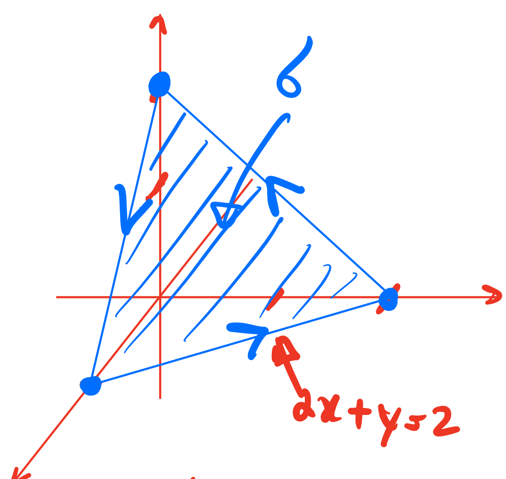
> **ทฤษฎีบท 2.** (ทฤษฎีบทของสโตกส์)
> ให้ σ เป็นพื้นผิวในปริภูมิ 3 มิติที่มีทิศทางและปรับเรียบเป็นช่วง และมีขอบเป็นเส้นโค้ง C ที่เป็นเส้นโค้งอย่างง่าย ปิด ปรับเรียบเป็นช่วง และมีทิศทางบวก ถ้าฟังก์ชันส่วนประกอบของ
>
> $$\mathbf{F}(x,y,z) = f(x,y,z)\mathbf{i} + g(x,y,z)\mathbf{j} + h(x,y,z)\mathbf{k}$$
>
> เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตเปิดที่บรรจุ σ แล้ว งานที่เกิดจากการเคลื่อนที่อนุภาคไปตามเส้นโค้ง C ภายใต้สนามแรง $\mathbf{F}$ คือ
>
> $$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_\sigma (\mathrm{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS$$

หมายเหตุ 3. สังเกตว่าทฤษฎีบทของสโตกส์ช่วยในการคำนวณงานของการเคลื่อนที่รอบเส้นโค้งปรับเรียบเป็นช่วงในปริภูมิ 3 มิติได้สะดวกขึ้น

ตัวอย่าง 5. กำหนดให้ C เป็นเส้นโค้งที่เป็นขอบเขตของบริเวณซึ่งเป็นส่วนของระนาบ $2x+y+z=2$ ในอัฐภาคที่ 1 และ $\mathbf{F}(x,y,z) = xz\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + 3xz\mathbf{k}$ จงหางาน $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ ของการเคลื่อนที่ของอนุภาคตามเส้นโค้ง C ภายใต้สนามแรง $\mathbf{F}$

วิธีทำ ตามสูตร

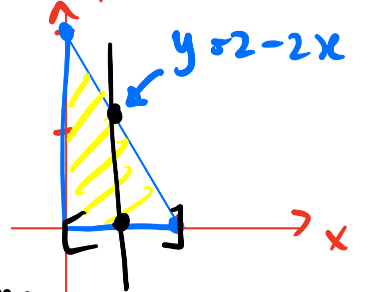
$$W = \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_\sigma (\mathrm{curl}\,\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS$$



พิจารณา

$$\mathrm{curl}\,\mathbf{F} = \left|\begin{array}{ccc|cc} i & j & k & i & j \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ xz & xy & 3xz & xz & xy \end{array}\right.$$

$$= 0i + xj + yk - 0k - 0i - 3zj$$
$$= (x-3z)j + yk$$



$x: x=0 \to x=1$

$y: y=0 \to y=2-2x$

พิจารณาสมการผิว σ คือ

$$z = \underbrace{2 - 2x - y}_{} =: g(x,y)$$

$$\Rightarrow G(x,y,z) = z - g(x,y)$$

$$= z - 2 + 2x + y = 2x + y + z - 2$$

$$\Rightarrow \nabla G = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

เนื่องจาก σ มีทิศทางบวก จึงพิจารณา

$$(\operatorname{curl}\mathbf{F}) \cdot \nabla G = \big((x - 3z)\mathbf{j} + y\mathbf{k}\big) \cdot (2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$= x - 3z + y = x + y - 3z$$

$$= x + y - 6 + 6x + 3y$$

$$= 7x + 4y - 6$$

ดังนั้น

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_\sigma (\operatorname{curl}\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS$$

$$= \iint_R (\operatorname{curl}\mathbf{F}) \cdot \nabla G \, dA$$

$$= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=2-2x} (7x + 4y - 6)\, dy\, dx$$

#

ตัวอย่าง 6. จงหางาน $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ของการเคลื่อนที่ของอนุภาคภายใต้สนามแรง

$$\mathbf{F}(x,y,z) = x^2\mathbf{i} + 4xy^3\mathbf{j} + xy^2\mathbf{k}$$

ตามเส้นโค้ง C ที่เป็นขอบเขตของบริเวณซึ่งเป็นส่วนของระนาบ $z = y$ ดัง Figure 3

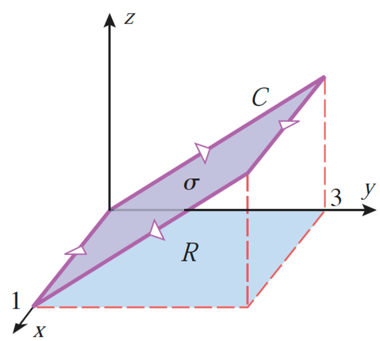


Figure 3: ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1159)

$$\oint_C \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_\sigma (\text{curl}\,\mathbb{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS$$

$$= \iint_R (\text{curl}\,\mathbb{F}) \cdot (-\nabla G)\, dA$$