SC 402 202 Calculus for Engineering III 1/2566

Surface Integrals

กลุ่ม 01 Chapter 4 Vector Calculus

แบบฝึกหัด:

ABD12 : Section 15.5 : 1-8, 9-12, 20, 23-24, 27-28, 29, 30, 31, 32, 33-34, 35-38

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาปริพันธ์ของฟังก์ชันบนพื้นผิวเรียบ (smooth surface) ในปริภูมิ 3 มิติ ซึ่งแนวคิดพื้นฐานของปริพันธ์ในลักษณะนี้เกิดจากความต้องการหามวล (mass) ของแผ่นบางโค้ง (curved lamina) ที่มีการกำหนดความหนาแน่นเป็นฟังก์ชันความหนาแน่น (density function)

แผ่นบางโค้ง คือ วัตถุในอุดมคติที่มีความบาง (thin) จนสามารถมองเป็นพื้นผิวในปริภูมิ 3 มิติได้ ทั้งนี้ แผ่นบางโค้งอาจอยู่ในรูปของแผ่นงอ ดัง Figure 1 หรืออาจมีลักษณะเป็นพื้นผิวที่ปิดล้อมบริเวณในปริภูมิ 3 มิติ เช่น เปลือกไข่ เป็นต้น

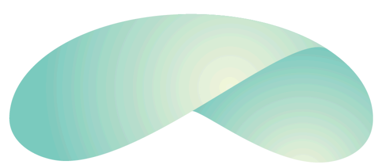

Figure 1: แผ่นบางโค้ง. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1130)

สมมติให้แผ่นบางโค้ง σ เป็นพื้นผิวเรียบในปริภูมิ 3 มิติ และกำหนดให้ (x,y,z) เป็นจุดใด ๆ บน σ สมมติให้ $f(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่น ณ จุด (x,y,z) เราสามารถประมาณค่ามวล M ของแผ่นบางโค้ง σ ได้ดังนี้

ในลำดับแรก เราจะแบ่งแผ่นบางโค้ง σ ออกเป็นแผ่นบางโค้งขนาดเล็ก $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ ที่มีพื้นที่เป็น $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$ ตามลำดับ ดัง Figure 2

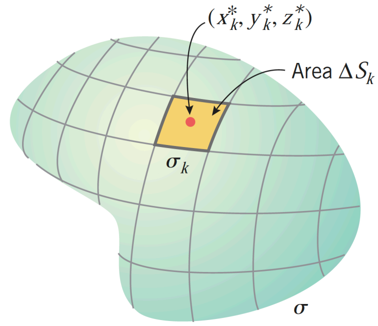

Figure 2: แผ่นบางโค้งขนาดเล็ก σ_k. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1130)

สำหรับแต่ละแผ่นบางโค้งขนาดเล็ก σ_k กำหนดให้ (x_k^*, y_k^*, z_k^*) เป็นจุดบนแผ่นบางโค้งขนาดเล็ก σ_k ที่มีมวล ณ จุดดังกล่าวนี้เป็น ΔM_k สังเกตว่า ถ้าแผ่นบางโค้งขนาดเล็ก σ_k มีขนาดเล็กมาก ๆ จะพบว่าค่าของฟังก์ชัน f ณ ทุกจุดบน σ_k สามารถประมาณค่าได้ด้วย $f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)$ นั่นคือ มวลของ σ_k จึงสามารถประมาณได้โดย

$$\Delta M_k \approx f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta S_k$$

ส่งผลให้มวลของแผ่นบางโค้ง σ สามารถประมาณได้โดย

$$M = \sum_{k=1}^{n} \Delta M_k \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta S_k$$

เมื่อเราแบ่งแผ่นบางโค้ง σ ให้เป็นแผ่นบางโค้งขนาดเล็กเป็นจำนวนมากขึ้นเรื่อย ๆ จนขนาดของแต่ละแผ่นบางโค้งขนาดเล็กนั้นเข้าใกล้ศูนย์ จะได้มวลของแผ่นบางโค้ง σ คือ

$$M = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta S_k$$

ซึ่งได้ในกรณีทั่วไปสามารถกำหนดเป็นบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1. ให้ σ เป็นพื้นผิวเรียบในปริภูมิ 3 มิติ และ $f(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน σ ปริพันธ์ตามผิว (surface integral) ของ $f(x,y,z)$ บน σ กำหนดโดย

$$\iint_{\sigma} f(x,y,z)\,dS = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta S_k$$

ถ้าลิมิตหาค่าได้

นั่นคือ ถ้า σ เป็นแผ่นบางโค้งปรับเรียบ และ $f(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นของแผ่นบางโค้งที่ต่อเนื่องบน σ มวลของแผ่นบางโค้ง σ คือ

$$M = \iint_{\sigma} f(x,y,z)dS$$

ทั้งนี้ เราสามารถคำนวณปริพันธ์ตามผิวได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1. ให้ σ เป็นพื้นผิวปรับเรียบในปริภูมิ 3 มิติ และ $f(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน σ

1. พื้นผิว σ กำหนดโดย $z = g(x,y)$ และ R เป็นภาพฉายของ σ ไปยังระนาบ xy ถ้าอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งของ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน R แล้ว

$$\iint_{\sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{R} f(x,y,g(x,y))\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}dA$$

2. พื้นผิว σ กำหนดโดย $y = g(x,z)$ และ R เป็นภาพฉายของ σ ไปยังระนาบ xz ถ้าอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งของ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน R แล้ว

$$\iint_{\sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{R} f(x,g(x,z),z)\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1}dA$$

3. พื้นผิว σ กำหนดโดย $x = g(y,z)$ และ R เป็นภาพฉายของ σ ไปยังระนาบ yz ถ้าอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งของ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน R แล้ว

$$\iint_{\sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{R} f(g(y,z),y,z)\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + 1}dA$$

ตัวอย่าง 1. จงหาค่าของ

$$\iint_{\sigma} xz\,dS$$

โดยที่ σ **เป็นพื้นผิวระนาบ** $x+y+z=1$ **ในอัฐภาคที่ 1 โดยที่**

(i) R **เป็นภาพฉายของ** σ **ไปยังระนาบ** xy

(ii) R **เป็นภาพฉายของ** σ **ไปยังระนาบ** xz

(iii) R **เป็นภาพฉายของ** σ **ไปยังระนาบ** yz

ตัวอย่าง 2. **กำหนดให้ σ เป็นพื้นผิวระนาบ $2x+3y+4z=12$ ในอัฐภาคที่ 1 จงหาค่าของ**

$$\iint_{\sigma} xyz\,dS$$

โดยที่ R เป็นภาพฉายของ σ ไปยังระนาบ xy

ตัวอย่าง 3. ให้ σ เป็นแผ่นบางโค้งที่เป็นส่วนของทรงพาราโบลา $z = x^2 + y^2$ ที่อยู่ใต้ระนาบ $z = 2$ และอยู่เหนือระนาบ $z = 1$ ถ้าแผ่นโค้งนี้มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x, y, z) = y^2z^2$ จงหามวลของแผ่นบางโค้งนี้

ทั้งนี้ เราสามารถคำนวณพื้นที่ผิวโดยใช้ปริพันธ์ตามผิวได้ดังหมายเหตุต่อไปนี้

หมายเหตุ 1. ให้ σ เป็นพื้นผิวปรับเรียบในปริภูมิ 3 มิติ ที่กำหนดโดย $z = g(x,y)$ และ R เป็นภาพฉายของ σ ไปยังระนาบ xy ถ้าอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งของ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน R แล้ว พื้นที่ผิว S ของ σ คือ

$$S = \iint_{\sigma} 1 dS = \iint_{R} \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dA$$

ตัวอย่าง 4. ให้ σ เป็นแผ่นบางโค้งที่เป็นส่วนของกรวย $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ที่อยู่ใต้ระนาบ $z = 2$ และอยู่เหนือระนาบ $z = 1$ จงหาพื้นที่ผิวของแผ่นบางโค้งนี้

ตัวอย่าง 5. **ให้ σ เป็นแผ่นบางโค้งที่เป็นส่วนของทรงกลม $x^2+y^2+z^2=16$ ที่อยู่ระหว่างระนาบ $z=1$ และ $z=2$ จงหาพื้นที่ผิวของแผ่นบางโค้งนี้**